

# APPUNTI DI FISICA SPAZIALE

**autore: VALERIANO BARASSI**  
(docente: *Giovanni Platania*)

Anno Accademico 1992-93

Quest'opera è soggetta alla Creative Commons Public License versione 3.0 o posteriore. L'enunciato integrale della Licenza in versione 3.0 è reperibile all'indirizzo internet:

*<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.it>*

- Si è liberi di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre, in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera alle seguenti condizioni:

**Attribuzione.** Bisogna attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da colui al quale è stata data quest'opera in licenza; in questo caso si tratta dell'autore,

**Non commerciale.** Non si può usare quest'opera per fini commerciali,

**Non opere derivate.** Non si può alterare o trasformare quest'opera, né usarla per crearne un'altra.

- Ogni volta che si usa o si distribuisce quest'opera, lo si deve fare secondo i termini di questa licenza, che va comunicata con chiarezza.
- In ogni caso si possono concordare con il titolare dei diritti d'autore (in questo caso l'autore) utilizzi di quest'opera non consentiti da questa licenza.

Quest'opera si avvale del diritto di citazione a scopo accademico e di critica previsto dall'Articolo 10 della Convenzione di Berna sul diritto d'autore.

*“Si deve ammettere che la relatività è andata oltre le teorie fisiche precedenti nel rinunciare alla «vicinanza all’esperienza» dei concetti fondamentali allo scopo di raggiungere la semplicità logica.”*

*– Albert Einstein*



# Indice

NOTE . . . . .	vi
<b>1 Le basi della Relatività Generale</b>	<b>1</b>
1.1 Richiami di Relatività Ristretta . . . . .	1
1.2 Impostazione Concettuale della Relatività Generale . . . . .	3
1.3 Elementi di Algebra Tensoriale . . . . .	7
<b>2 La formulazione delle Equazioni di Campo</b>	<b>13</b>
2.1 Il Tensore di Curvatura . . . . .	13
2.2 Il Tensore Energia-Impulso ed il Principio Variazionale . . . . .	17
2.2.1 Il Principio Variazionale e l'invarianza per trasformazioni . . . . .	20
2.3 Le Equazioni di Campo . . . . .	22
<b>3 La Soluzione di Schwarzschild</b>	<b>25</b>
3.1 La soluzione Esterna . . . . .	25
3.2 La Soluzione Interna . . . . .	30
<b>4 Applicazioni Cosmologiche</b>	<b>33</b>
4.1 Introduzione alla Cosmologia . . . . .	33
4.2 La Soluzione Cosmologica di Friedmann . . . . .	34
4.3 Calcolo del Tensore di Curvatura nella Soluzione di Friedmann . . . . .	41
4.4 Definizione di una Scala Temporale . . . . .	44
4.5 La Radiazione Cosmica di fondo . . . . .	46
4.6 Il Modello Inflazionario . . . . .	47

## NOTE

*Il presente scritto è costituito dagli appunti raccolti durante l corso di Fisica Spaziale tenuto dal prof. GIOVANNI PLATANIA nell'Anno Accademico 1992-93 presso la Facoltà di Fisica dell'Università di Napoli "Federico II".*

*Alcune parti sono state integrate dal testo "An Introduction to mathematical cosmology", J.N.Islam, Cambridge University Press, 1992*

*Le parti riguardanti le basi concettuali e matematiche sono trattate in maniera veloce ed il corso è trattato in maniera non eccessivamente formale, pertanto esso presume già una buona conoscenza di base dell'apparato formale della teoria della relatività ristretta e generale.*

*Il corso si incentra essenzialmente sullo studio di due soluzioni delle equazioni di campo di Einstein. La prima è la soluzione nel caso di un corpo massivo a simmetria sferica, che riproduce bene il comportamento di una stella. La seconda è una classica soluzione cosmologica, quella di Friedmann. Si tratta di una soluzione che descrive l'universo nelle ipotesi di omogeneità e isotropia e senza materia. Infine, sono dati alcuni cenni al modello cosmologico inflazionario.*

*Queste note devono quindi a maggior ragione essere considerate più come una traccia per lo studio che una trattazione esaustiva dell'argomento.*

*Questo lavoro è distribuito liberamente nella speranza che possa essere utile nella preparazione degli esami, con la sola condizione che si citi il nome dell'autore e la fonte.*

# Le basi della Relatività Generale

## 1.1 Richiami di Relatività Ristretta

La meccanica classica presenta delle difficoltà concettuali che possono essere riassunte nei seguenti punti:

1. la definizione reciproca di sistema di riferimento inerziale e sistema di riferimento assoluto: in pratica, questi si definiscono a vicenda;
2. l'equivalenza di massa inerziale e massa gravitazionale.

Vale la pena sottolineare che non c'è alcuna ragione *di principio* per cui debba valere la seconda delle due assunzioni. Tale equivalenza è dimostrata solo su base sperimentale, attualmente verificata a meno di  $10^{-12}$ . La teoria della relatività generale permette di superare le difficoltà enunciate e prevede che l'interazione tra i corpi sia dovuta non allo scambio di forze, ma alla curvatura stessa dello spazio.

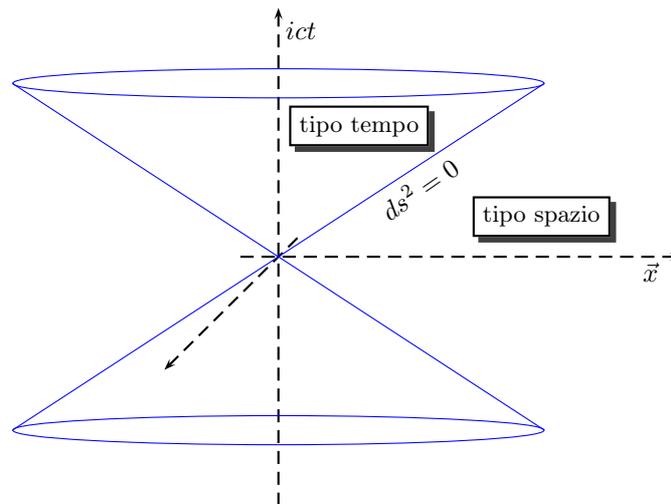
In relatività c'è differenza fra tempo coordinato e tempo proprio. L'elemento di distanza nello spaziotempo di Minkowski è dato dall'invariante di Lorentz:

$$ds^2 = d\vec{x}^2 - cdt^2$$

Tale quantità permette di definire un *cono di luce* (o *cronotopo*), le cui falde sono date da  $ds^2 = 0$ , ovvero  $d\vec{x}^2 = cdt^2$ . Questa è l'equazione che descrive un raggio di luce:<sup>1</sup> pertanto le falde generatrici del cono sono formate da tutti i percorsi possibili dei raggi di luce. La condizione  $ds^2 < 0$  implica che  $d\vec{x}^2 < cdt^2$ , in questa regione quindi le traiettorie (*linee di universo*) sono quelle di un corpo che si muove a  $v < c$ .<sup>(2)</sup> Un evento che soddisfa questa relazione si dice di tipo tempo, e risulta definibile una relazione di causalità fra eventi successivi nel cronotopo. La condizione  $ds^2 > 0$  implica invece che  $d\vec{x}^2 > cdt^2$ : le linee di universo in questa regione rappresentano quindi delle traiettorie di particelle che si muovono a velocità superiore a  $c$ . Si parla in questo caso di intervalli di tipo spazio e per questi eventi non è definibile una relazione di causalità. Tutti i moti di particelle reali sono quindi costituiti da intervalli di tipo tempo.

<sup>1</sup>Si noti infatti che  $cdt$  è precisamente la distanza percorsa da un raggio luminoso nell'intervallo di tempo  $dt$ .

<sup>2</sup>In quanto la distanza  $d\vec{x}$  percorsa dal corpo nell'intervallo di tempo  $dt$  è inferiore a quella percorsa nello stesso tempo da un raggio di luce.



Le trasformazioni di Lorentz intorno all'asse  $x$  sono definite da:

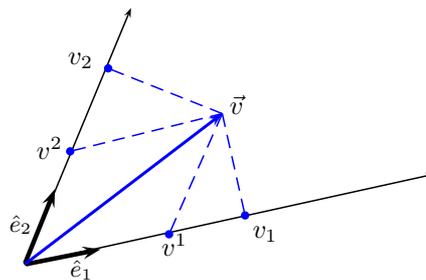
$$\begin{cases} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma(t - vx) \end{cases} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

con la matrice delle trasformazioni che dipende dalla velocità relativa.

Diamo ora una utile rappresentazione “visuale” delle componenti di un vettore. Sia un sistema di riferimento non cartesiano, bidimensionale per semplicità,  $\vec{v}$  un vettore e siano  $\hat{e}_i$  i versori degli assi. Si definiscono:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v^1 \hat{e}_1 + v^2 \hat{e}_2 && \text{Componenti Controvarianti } v^i \\ v_1 &= \vec{v} \cdot \hat{e}_1 && \text{Componenti Covarianti } v_i \end{aligned}$$

Questa rappresentazione permette una immediata interpretazione geometrica: le componenti controvarianti rappresentano le effettive componenti del vettore  $\vec{v}$  nella base  $\hat{e}_i$ , mentre le componenti covarianti rappresentano la *proiezione* del vettore  $\vec{v}$  sui versori  $\hat{e}_i$  della base (si faccia riferimento alla figura seguente).



Questo permette inoltre di definire i vettori covariante  $v_\alpha = (v_1, v_2)$  e controvariante  $v^\alpha = (v^1, v^2)$  associati a  $\vec{v}$ .

In relatività, la definizione formalmente precisa è la seguente:

- si dice vettore covariante un insieme di quattro componenti che trasformino come uno scalare
- si dice vettore controvariante un insieme di quattro componenti che trasformino come il quadrivettore  $dx^\alpha$

Questa definizione sarà ripresa in maniera più esplicita in §1.3.

Nel caso di un sistema di coordinate ortogonali le due componenti coincidono: esse indicano in pratica la stessa quantità. È facile verificare, infatti, che nei sistemi cartesiani ortogonali la proiezione di un vettore su uno degli assi corrisponde alla sua componente lungo quell'asse.

Ciò che permette di passare da un sistema di rappresentazione all'altro è la matrice:<sup>3</sup>

$$g_{ij} = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2$$

Vale la pena sottolineare che non è possibile definire uno spazio-tempo di Galilei. Infatti, siccome le leggi di trasformazione di Galilei non mischiano coordinate spaziali e temporali e non tengono in conto il tempo (a differenza di quelle di Lorentz), si deduce che gli elementi di matrice relativi devono essere nulli, e quindi che il tensore metrico relativo deve avere la forma:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(g_{ij}) = 0$$

Lo zero sulla diagonale pregiudica l'esistenza di quadrivettori, rende inoltre il determinante della matrice nullo. Questo impedisce la costruzione di una matrice inversa  $g^{ij}$ , la quale è invece necessaria per la costruzione di una trasformazione inversa.

## 1.2 Impostazione Concettuale della Relatività Generale

Il campo gravitazionale si presenta come l'unico campo che accelera un corpo indipendentemente dalla sua massa. Un corpo in caduta libera sottoposto alla sola forza di gravità segue infatti la legge:

$$m_i \frac{d^2 x}{dt^2} = m_g g$$

Se si assume quindi che valga l'equivalenza della massa gravitazionale ed inerziale, la legge assume la forma:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g$$

che ci permette di studiare il moto di questo corpo in un sistema non inerziale. Infatti, in un sistema in cui vale:

$$x' = x + \frac{1}{2}gt^2$$

la particella risulta ferma. Si è quindi trovato un sistema non inerziale in cui la particella è libera. Pertanto, se è vero che si può trovare un sistema in cui si annulla l'effetto del campo gravitazionale, si può trovare un sistema non inerziale che simuli una forza gravitazionale. Una particella ferma in un sistema di riferimento inerziale, nel sistema non inerziale di sopra presenterà infatti una accelerazione verso il basso pari a  $g$ .<sup>4</sup> Il concetto è analogo a quello delle forze *apparenti* in un sistema non inerziale di riferimento.

Il punto essenziale è quindi la ricerca di una trasformazione delle coordinate  $\bar{x}' \rightarrow f^\alpha(\bar{x})$  che trasformi un sistema soggetto alla forza gravitazionale in un sistema inerziale *punto per punto*. È importante specificare *punto per punto* perché è impossibile definire un sistema non inerziale che sostituisca *globalmente* il campo gravitazionale. Tale impossibilità può essere compresa ricordando che i campi reali tendono sempre a zero a distanza infinita dai corpi che lo generano, mentre i campi equivalenti a sistemi di riferimento non inerziali o crescono illimitatamente a infinito o al massimo tendono ad un valore costante. Si pensi ad esempio alle forze centrifughe che nascono in un sistema rotante e tendono all'infinito man mano che ci si allontana dall'asse di rotazione.

La trasformazione cercata deve pertanto essere necessariamente locale e deve continuare a soddisfare l'equazione della geodetica:<sup>5</sup>

$$\frac{d^2 f^\alpha}{ds^2} = 0$$

<sup>3</sup>Questa matrice – che in realtà è un tensore – prende il nome di *Tensore Metrico*.

<sup>4</sup>È in pratica il cosiddetto *Gedankenexperiment* dell'ascensore di Einstein.

<sup>5</sup>Vale la pena notare fin d'ora che una trasformazione di questo tipo cambia il tensore metrico, quindi l'elemento di distanza. In altri termini, la forza gravitazionale, equivalente localmente ad un sistema non inerziale, induce una variazione della metrica.

Esplicitiamo quindi quest'equazione nel nuovo sistema di riferimento:

$$\frac{d^2 f^\alpha}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{d}{ds} f^\alpha \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{df^\alpha}{dx^\beta} \frac{dx^\beta}{ds} \right) = \frac{df^\alpha}{dx^\beta} \frac{d^2 x^\beta}{ds^2} + \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds}$$

moltiplicando per  $\partial x^\delta / \partial f^\alpha$  e sfruttando la relazione:

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\delta}{\partial f^\alpha} = \delta_\beta^\delta$$

si trova la seguente:

$$\frac{\partial x^\delta}{\partial f^\alpha} \left( \frac{df^\alpha}{dx^\beta} \frac{d^2 x^\beta}{ds^2} + \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} \right) = \frac{d^2 x^\delta}{ds^2} + \Gamma_{\gamma\delta}^\beta \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds}$$

dove si è definito:

$$\Gamma_{\gamma\delta}^\beta \equiv \frac{dx^\delta}{df^\alpha} \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} \quad \text{Connessione Affine} \quad (1.1)$$

il che permette di scrivere l'equazione della geodetica nel nuovo sistema come:

$$\frac{d^2 x^\delta}{ds^2} + \Gamma_{\gamma\delta}^\beta \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0 \quad (1.2)$$

L'elemento di distanza in un sistema di riferimento non inerziale assume la forma  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  dove la metrica  $g_{\alpha\beta} \neq \eta_{\alpha\beta}$ , è diversa dalla metrica piatta dello spazio di Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$ . Per illustrare questo concetto, è utile riportare un semplice esempio.

È noto che in un sistema di riferimento inerziale l'elemento di distanza è dato da ( $c \equiv 1$ ):<sup>6</sup>

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

e che tale elemento è invariante nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro. Supponiamo un sistema di riferimento rotante con velocità  $\omega$  intorno all'asse  $z$ :

$$\begin{cases} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\ y &= x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \\ z &= z' \\ t &= t' \end{cases}$$

calcolando il quadrintervallo nel sistema di riferimento solidale alla piattaforma tramite i rispettivi differenziali e sommando, si ricava la seguente espressione:

$$ds^2 = [1 - \omega^2(x'^2 + y'^2)] dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\omega y' dx' dt' - 2\omega x' dy' dt'$$

questa espressione non può mai essere ridotta alla somma dei quadrati dei differenziali. Quindi in un sistema di riferimento non inerziale il  $ds$  sarà una forma quadratica generale dei differenziali delle coordinate. Nel particolare caso esaminato, il tensore metrico  $g_{\alpha\beta}$  ha le seguenti componenti:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - \omega^2(x'^2 + y'^2) & 2\omega y' & -2\omega x' & 0 \\ 2\omega y' & -1 & 0 & 0 \\ -2\omega x' & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e, come si vede, il passaggio ad un sistema di riferimento non inerziale ha modificato la forma della metrica.

Riassumendo: l'assunzione dell'equivalenza di massa inerziale e massa gravitazionale permette di svincolare l'accelerazione dalla massa e permette di descrivere le forze in termini geometrici.

<sup>6</sup>Si utilizzerà qui e nel seguito la *segnatura* + - - - per il tensore metrico.

Ricaveremo pertanto ora il legame fra geometria (tensore metrico) e la forza gravitazionale. Per fare ciò, preliminarmente ricerchiamo la relazione fra tensore metrico e connessione affine.

È chiaro che anche nel sistema non inerziale l'elemento di distanza deve essere uno scalare:<sup>7</sup>

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} df^\alpha df^\beta \quad (1.3)$$

esplicitando il  $df^\alpha$  (introduciamo qui la notazione virgola per indicare la derivata):

$$df^\alpha = \frac{df^\alpha}{dx^\beta} dx^\beta \equiv f_{,\beta}^\alpha dx^\beta$$

che sostituito nella (1.3):

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} f_{,\gamma}^\alpha dx^\gamma f_{,\delta}^\beta dx^\delta$$

e comparando quest'ultima con l'espressione dell'elemento di distanza nel sistema del laboratorio si trova  $g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} f_{,\mu}^\alpha f_{,\nu}^\beta$ , da cui l'espressione delle derivate del tensore metrico (si tenga presente che  $\eta_{\alpha\beta,\lambda} = 0$ ):

$$g_{\mu\nu,\lambda} = f_{,\mu,\lambda}^\alpha f_{,\nu}^\beta \eta_{\alpha\beta} + f_{,\mu}^\alpha f_{,\nu,\lambda}^\beta \eta_{\alpha\beta} \quad (1.4)$$

Se si tiene ora presente l'espressione della connessione affine data dalla (1.1), si trova:

$$f_{,\mu,\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda f_{,\lambda}^\alpha$$

e sostituendo nell'espressione (1.4) della metrica si ricava:

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho f_{,\rho}^\alpha f_{,\nu}^\beta \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho f_{,\mu}^\alpha f_{,\rho}^\beta \eta_{\alpha\beta}$$

e cioè:

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho} \quad (1.5)$$

se si scambiano ora gli indici  $\mu \leftrightarrow \lambda$  e  $\nu \leftrightarrow \lambda$  si ricavano due relazioni analoghe:

$$\begin{aligned} g_{\lambda\nu,\mu} &= \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\lambda\rho} & \mu \leftrightarrow \lambda \\ g_{\mu\lambda,\nu} &= \Gamma_{\nu\mu}^\rho g_{\rho\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\mu\rho} & \nu \leftrightarrow \lambda \end{aligned}$$

sommando infine la prima di queste e sottraendo la seconda alla (1.5) si trova:<sup>8</sup>

$$g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho g_{\rho\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho g_{\mu\rho}$$

ricordando che il tensore metrico è simmetrico e che la connessione è simmetrica per scambio degli indici covarianti (se vale il teorema di Schwarz), l'espressione si riduce alla seguente:

$$g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu} = 2\Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu}$$

introducendo infine un tensore metrico controvariante tale da soddisfare la relazione  $g_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} = \delta_\beta^\gamma$  ("tensore inverso") e moltiplicando per esso l'ultima espressione, si ricava:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu}) \quad (1.6)$$

Questa è l'espressione che lega la connessione alla metrica. Dalla (1.6) è evidente che essa ha 40 componenti: gli indici  $\lambda, \nu$  forniscono 10 componenti: 4 dalla diagonale e 6 fuori diagonale (il tensore metrico è simmetrico). L'indice  $\rho$  va da 0 a 3, fornendo quindi un totale di  $10 * 4 = 40$  componenti.

La relazione (1.6) appena trovata permette di esprimere l'equazione del moto (1.2) in termini della metrica. Per eseguire questo calcolo, faremo le tre ipotesi semplificatrici che restituiscono il limite newtoniano:

<sup>7</sup>La distanza, infatti, rimane un "segmento" – anche se in un senso più generale – anche nel sistema non inerziale e deve pertanto trasformare come uno scalare.

<sup>8</sup>Ovviamente, una qualunque combinazione ottenuta sommando due delle equazioni e sottraendo una terza sarebbe andata bene. L'unica differenza consiste nelle lettere che avremmo ottenuto alla fine, ma ciò è irrilevante.

1. **Velocità piccole.** Questo significa  $v \ll c$  e dunque  $d\vec{x}/ds \ll dt/ds$ . Quindi si potranno trascurare le derivate spaziali rispetto a quelle temporali;
2. **Regime di campo statico.** Questo significa che  $g_{\alpha\beta,0} = 0$ , ovvero che le derivate temporali della metrica sono nulle;
3. **Regime di campo debole.** Questo permette di scrivere la metrica come  $g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$  con  $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$

In tali ipotesi, l'equazione (1.2) della geodetica diviene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{00}^\alpha \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} &\equiv \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{00}^\alpha \left( \frac{dx^0}{ds} \right)^2 \\ \Gamma_{00}^\alpha &= -\frac{1}{2} g^{\alpha\rho} g_{00,\rho} = -\frac{1}{2} (\eta^{\alpha\rho} + h^{\alpha\rho}) (\eta_{00} + h_{00})_{,\rho} \cong \\ &\cong -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} h_{00,\rho} \end{aligned}$$

L'ultima relazione segue dal fatto che  $\eta_{00,\rho} = 0$  e avendo trascurato i termini al secondo ordine in  $h^{\alpha\beta}$  ed il termine misto  $h^{\alpha\beta} \eta_{00,\rho}$ . Notare che i tensori  $\eta^{\alpha\rho}$  e  $h^{\alpha\rho}$  non sono gli inversi dei rispettivi tensori covarianti, ma sono definiti a partire da  $g^{\alpha\rho}$ : si costruisce il tensore inverso  $g_{\alpha\rho}$  come richiesto dalla (1.6), e la sua scomposizione fornisce i termini  $\eta^{\alpha\rho}$  e  $h^{\alpha\rho}$ .

L'equazione del moto diventa allora:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} h_{00,\rho} \left( \frac{dx^0}{ds} \right)^2 = 0$$

e seguendo la prassi normale in relatività speciale, il limite classico si ottiene separando l'equazione nella sua parte spaziale e temporale:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 \vec{\nabla}^2 h_{00} \\ \frac{d^2 t}{ds^2} &= 0 \end{aligned}$$

la seconda equazione fornisce  $dt/ds$  costante<sup>9</sup>, da cui:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}^2 h_{00}$$

ricordando che l'equazione di una particella in un campo gravitazionale è data da:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \varphi \quad \varphi = -\frac{Gm}{r}$$

comparando si trova:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{1}{2} h_{00} \\ g_{00} &= -(1 + 2\varphi) \end{aligned}$$

Si è giunti quindi al risultato cercato: nel limite newtoniano il potenziale appare sullo stesso piano della metrica. Poichè la connessione è legata alle derivate del tensore metrico, si può dedurre che *la connessione è legata alla forza*. In realtà, già da un esame diretto dell'equazione della geodetica (1.2) si può riconoscere nel primo termine l'accelerazione del corpo, quindi il secondo termine deve essere legato alla forza: confermando così per via intuitiva il risultato appena ottenuto.

A questo punto è utile dare una versione alternativa del principio di equivalenza. Esso afferma quanto segue.

*Se si verificano le due condizioni seguenti:*

<sup>9</sup>E infatti  $dt/ds = 1$  ( $dt/ds = c$ ). D'ora in poi si useranno le unità naturali in cui  $c \equiv 1$ , salvo casi particolari.

1. un'equazione vale in assenza di gravitazione; cioè essa è in accordo con la relatività speciale quando il tensore metrico  $g_{\alpha\beta}$  si riduce al tensore  $\eta_{\alpha\beta}$  e la connessione  $\Gamma$  si annulla,
2. l'equazione è generalmente covariante; cioè essa conserva la sua forma sotto una trasformazione generale di coordinate  $x \rightarrow x'$ ;

allora l'equazione vale in un campo gravitazionale generico.

Il principio espresso in questa forma assume il nome di *Principio di Covarianza Generale*. Si deve notare che la validità del principio è limitata ad una scala piccola comparata con le distanze spazio-temporali tipiche del campo gravitazionale, perché solo su questa piccola scala il principio di equivalenza assicura di poter costruire un sistema di coordinate in cui gli effetti del campo gravitazionale siano assenti. Questa limitatezza dell'applicabilità del principio rende ragionevole aspettarsi che solo il tensore  $g_{\alpha\beta}$  e le sue derivate prime entreranno nelle equazioni generalmente covarianti.

### 1.3 Elementi di Algebra Tensoriale

Definiamo ora alcune quantità fondamentali nell'analisi tensoriale.

La quantità più semplice definibile è lo scalare, che rimane invariato per trasformazioni generali di coordinate:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu \quad : \quad s \rightarrow s' \equiv s$$

Un vettore può avere proprietà covarianti o controvarianti:

$$\begin{aligned} \text{Vettore controvariante } v'^\mu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \\ \text{Vettore covariante } v'_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} v_\nu \end{aligned}$$

Il prodotto diretto delle componenti  $A^\nu B^\nu (A \otimes B)$  trasforma come:

$$A'^\mu B'^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} A^\alpha B^\beta$$

e tale trasformazione permette di definire un tensore controvariante del secondo ordine:

$$T'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} T^{\mu\nu}$$

torna utile notare che il termine  $\partial x' / \partial x$  è lo jacobiano della trasformazione, che indicheremo quindi con  $J$ : la legge di trasformazione per tensori misti generici si può allora essere facilmente generalizzata secondo l'esempio seguente:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = J J^{-1} J^{-1} J^{-1} R^\lambda_{\mu\nu\rho}$$

In questo modo si riesce anche a dimostrare che la matrice metrica è proprio un tensore covariante di ordine 2:

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial f^\beta}{\partial x'^\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = g_{\lambda\rho} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}$$

Inoltre, si possono effettuare moltiplicazioni fra tensori di indici qualsiasi, il risultato consiste in un tensore con tutti gli indici superiori e/o inferiori dei tensori di partenza. Invece, la somma può essere effettuata solo su tensori dello stesso ordine.

Una operazione particolare eseguibile sui tensori è la *contrazione*:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \rightarrow R^\alpha_{\alpha\gamma\delta}$$

dove è ovviamente sottintesa una sommatoria sull'indice ripetuto.<sup>10</sup> Il risultato della contrazione è pertanto un tensore di ordine inferiore di due rispetto al tensore originario. La contrazione si può

<sup>10</sup>La convenzione di Einstein sugli indici. Se  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ , allora  $R^\alpha_{\alpha\gamma\delta} = R^0_{0\gamma\delta} + R^1_{1\gamma\delta} + R^2_{2\gamma\delta} + R^3_{3\gamma\delta}$

effettuare solo fra indici controvarianti e covarianti: si può mostrare infatti che una contrazione del tipo  $R_{\beta\beta}$  non fornisce uno scalare, o più in generale un vettore o un tensore.

Si è notato che la matrice metrica può essere utilizzata per innalzare o abbassare gli indici di un vettore tramite l'operazione:

$$V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta$$

È importante quindi considerarne il determinante. Poiché vale la relazione:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}$$

per il determinante sussiste:

$$g' = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \right|^2 g$$

quindi il determinante  $g$  non è uno scalare, e ci si riferisce ad esso come *densità tensoriale* di peso 2. Più in generale, se si considera un peso  $w$ , si ottiene un tensore moltiplicando per  $J^{-w/2}$ , il che implica  $g^{-w/2} g' = J^{-2}$ . Questa relazione permette di dedurre che la matrice del determinante ha le proprietà giuste per essere uno scalare, e quindi l'elemento di volume quadridimensionale:

$$d^4 x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4 x \quad \rightarrow \quad d^4 x' = \sqrt{g} \cdot d^4 x$$

e l'ultimo termine rappresenta l'elemento di volume invariante, che si riduce a  $d^4 x$  nello spazio di Minkowski.

Infine diamo la legge di trasformazione della connessione:

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\alpha\sigma}{}^\rho + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}$$

dove il secondo termine è nullo se la trasformazione è inerziale.

Analizziamo ora il concetto di derivata, che deve essere opportunamente generalizzato per conservare validità in un sistema generale di coordinate. Si consideri la derivata di un vettore:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} A'_\beta = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \left[ \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} A_\mu \right] = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu + \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} A_\mu \quad (1.7)$$

risulta quindi evidente che la derivata di un vettore non è un vettore. Inoltre, se essa è nulla in un sistema di riferimento, non si può assicurare che sia nulla in ogni sistema. Questo problema fondamentale può tuttavia (e fortunatamente) essere rimosso. A tal fine, consideriamo la quantità derivata dalla (1.7) in modo banale:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} A'_\beta - \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} A_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu$$

ricordando quindi la relazione di trasformazione di un vettore covariante e sostituendo nella precedente:

$$A_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\mu} A'^\nu$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} A'_\beta - \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} A'_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} A'_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}{}^\nu A'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu$$

si può quindi definire la *derivata covariante di un vettore covariante*:

$$D_\alpha A_\beta \equiv A_{\beta;\alpha} = \left[ \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} A'_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}{}^\nu A'_\nu \right]$$

che soddisfa tutte le proprietà note delle derivate e trasforma i vettori (e i tensori) nel modo corretto. In più verifica le seguenti:

$$f \text{ scalare} \quad \Rightarrow \quad f_{;\mu} = f_{,\mu}$$

$$V_{[\mu;\nu]} = V_{[\mu,\nu]}$$

dove si è introdotto per compattezza la notazione di *antisimmetrizzazione*:<sup>11</sup>

$$V_{[\mu,\nu]} \equiv \frac{1}{2} (V_{\mu,\nu} - V_{\nu,\mu})$$

Poichè il prodotto scalare deve essere invariante, si deve verificare:

$$(A_\alpha B^\alpha)_{;\mu} = (A_\alpha B^\alpha)_{;\mu}$$

da cui, sviluppando opportunamente i due membri:

$$A_{\alpha;\mu} B^\alpha + A_\alpha B^\alpha_{;\mu} = (A_{\alpha,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu A_\nu) B^\alpha + A_\alpha B^\alpha_{;\mu} = A_{\alpha,\mu} B^\alpha + A_\alpha B^\alpha_{;\mu}$$

ovvero, scambiando gli indici muti  $\alpha \leftrightarrow \nu$ :

$$A_\alpha [B^\alpha_{;\mu} - B^\alpha_{;\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha B^\nu] \quad \forall A_\alpha$$

questa è quindi la formula della *derivata covariante di un vettore controvariante*:

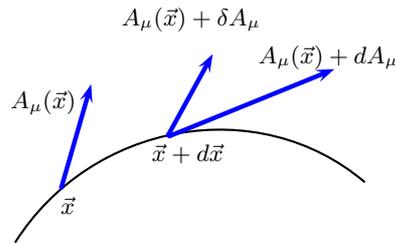
$$\boxed{B^\alpha_{;\mu} = B^\alpha_{,\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\alpha B^\nu}$$

Per un tensore, la generalizzazione è immediata. Per esempio per un tensore una volta covariante e due volte controvariante vale:

$$T^{\mu\nu}_{\alpha;\lambda} = T^{\mu\nu}_{\alpha,\lambda} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu T^{\sigma\nu}_\alpha + \Gamma_{\lambda\sigma}^\nu T^{\mu\sigma}_\alpha - \Gamma_{\lambda\alpha}^\sigma T^{\mu\nu}_\sigma$$

La differenza tra derivata normale e derivata covariante è suscettibile di una interessante interpretazione geometrica. Come è noto, la derivata normale si effettua calcolando il rapporto incrementale del vettore, il che richiede implicitamente di effettuare la differenza di due vettori in due punti vicini.

In un sistema di coordinate curvilineo, questa operazione non è banale e deve essere opportunamente generalizzata. Sia dunque  $A_\mu(\vec{x})$  un vettore applicato nel punto  $\vec{x}$ . In un sistema generale di coordinate si deve fare distinzione fra il vettore applicato nel punto vicino  $A_\mu(\vec{x} + d\vec{x}) = A_\mu(\vec{x}) + dA_\mu$  ed il vettore ottenuto trasportando parallelamente il vettore originario fino al punto  $\vec{x} + d\vec{x}$ :  $A_\mu(\vec{x}) \rightarrow A_\mu(\vec{x}) + \delta A_\mu$ . Si faccia riferimento alla figura seguente.



Nel *trasporto parallelo* in un sistema generico di coordinate le componenti del vettore cambiano, a differenza di ciò che accade in metrica piatta: per trasporto parallelo si intende infatti il trasporto del vettore effettuato mantenendo costante l'angolo che esso forma con la superficie curva. Per calcolare il rapporto incrementale si deve pertanto prima trasportare parallelamente il vettore nel punto  $\vec{x} + d\vec{x}$  e poi calcolare la differenza dei due vettori applicati ora nello stesso punto [ $A_\mu(\vec{x}) + dA_\mu - (A_\mu(\vec{x}) + \delta A_\mu)$ ]. In generale la variazione delle componenti del vettore è espressa da:

$$\delta A_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\rho (A_\rho dx^\nu)$$

<sup>11</sup>Per completezza, introduciamo anche la notazione di *simmetrizzazione*:

$$V_{(\mu,\nu)} \equiv \frac{1}{2} (V_{\mu,\nu} + V_{\nu,\mu})$$

che sostituita nel rapporto incrementale ed effettuandone il limite, fornisce proprio la derivata covariante.

Quindi si impone la seguente interpretazione: *la connessione affine è la proprietà di assegnare al campo come trasportare un vettore parallelamente, con l'assunzione che dipenda linearmente da  $A_\rho$  e da  $dx^\nu$ , cioè dal vettore stesso e dallo spostamento del punto di applicazione.*

Un caso particolare interessante è la derivata covariante ristretta ad una curva. Sia dato un vettore  $A^\mu(s)$  lungo una curva di ascissa curvilinea  $s$ : la sua derivata si ottiene proiettando la derivata lungo la curva, cioè in pratica moltiplicando scalarmente la derivata con il vettore tangente:

$$\frac{dx^\sigma}{ds} A_{;\sigma}^\mu = \frac{DA^\mu}{Ds} = \frac{dA^\mu}{ds} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\lambda}{ds} A^\nu$$

ricordando l'equazione della geodetica (1.2) si nota che essa può essere scritta nella forma di derivata covariante:

$$\frac{DV^\mu}{Ds} = 0 \quad \text{dove } V^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$$

e cioè l'equazione della geodetica è proprio l'equazione per cui il vettore tangente è trasportato parallelamente.

La divergenza covariante si ottiene ovviamente saturando l'indice della derivata. Essa si può riscrivere in modo più utile:

$$\begin{aligned} A_{;\mu}^\mu &= A_{,\mu}^\mu + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu A^\alpha \\ \Gamma_{\mu\alpha}^\mu &= \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\mu,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\mu} - g_{\mu\alpha,\sigma}) = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} g_{\sigma\mu,\alpha} \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che in tal caso gli indici  $\mu$  e  $\sigma$  sono indici di somma simmetrici. Ricordando ora la definizione di determinante  $g = g_{\mu\sigma} G^{\mu\sigma}$ , dove  $G^{\mu\sigma}$  rappresenta il minore corrispondente del termine  $g_{\mu\sigma}$  (teorema di Laplace), segue:

$$\frac{G^{\mu\sigma}}{g} = g_{\mu\sigma} \quad \Rightarrow \quad G^{\mu\sigma} = g \cdot g_{\mu\sigma}$$

calcolando:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g = \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\sigma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g^{\mu\sigma} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g = g \cdot g^{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\sigma} \quad (1.8)$$

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} g_{\sigma\mu,\alpha} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} \quad (1.9)$$

poiché vale:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \lg \sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{g} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\alpha}$$

da questa relazione segue:

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \lg \sqrt{g}$$

e si ricava infine:

$$A_{;\mu}^\mu = A_{,\mu}^\mu + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu A^\alpha \quad \Rightarrow \quad A_{;\mu}^\mu = A_{,\mu}^\mu + \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \lg \sqrt{g} \right) A^\mu$$

$$\boxed{D_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} A^\mu)}$$

Per un tensore sussiste una forma analoga:

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}$$

e poiché la connessione è simmetrica negli indici covarianti, se  $T^{\mu\nu}$  è un tensore antisimmetrico (come nel caso del tensore elettromagnetico  $F^{\mu\nu}$ ) il secondo termine è nullo.

Una differenza sostanziale rispetto alla derivata “normale” (non covariante) è nella relazione fra derivata nulla e quantità conservate. Nel caso presente, un'equazione del tipo :

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$$

non implica assolutamente la conservazione di qualcosa, a differenza di ciò che accade nel caso classico.

Si vede subito che la derivata covariante del tensore metrico deve essere nulla. Infatti, essendo una equazione tensoriale, deve valere in ogni sistema di riferimento. Ma essa è valida sicuramente in un sistema inerziale, quindi deve essere valida in generale. Tale proprietà è facilmente dimostrabile anche per altra via, a tal fine sia  $A_\mu$  un vettore generico:

$$A_{\mu;\lambda} = (g_{\mu\nu}A^\nu)_{;\lambda} = g_{\mu\nu;\lambda}A^\nu + g_{\mu\nu}A^\nu_{;\lambda}$$

d'altra parte si può innalzare direttamente l'indice alla derivata covariante al primo membro:

$$A_{\mu;\lambda} = g_{\mu\nu}A^\nu_{;\lambda}$$

e dal confronto:

$$g_{\mu\nu}A^\nu_{;\lambda} = g_{\mu\nu;\lambda}A^\nu + g_{\mu\nu}A^\nu_{;\lambda}$$

segue senz'altro che (*Postulato Metrico*):

$$\boxed{g_{\mu\nu;\lambda} = 0}$$

Tale relazione, che prende il nome di postulato metrico, afferma che *ogni tensore a due indici la cui derivata covariante sia nulla è un tensore metrico*. Tale proposizione è però solo condizione sufficiente, ma non necessaria e non può quindi essere invertita: esistono infatti tensori metrici a derivata covariante non nulla.<sup>12</sup>

Con l'apparato formale fin qui costruito, il passaggio da relatività speciale a relatività generale può essere fatto in maniera semplice eseguendo i passi (i passaggi sono qui puramente formali, senza mettere in causa il significato fisico degli stessi):

1. Si sostituiscono a tutte le derivate le corrispettive derivate covarianti,  $\partial/\partial x \rightarrow D/Dx$ ;
2. Si sostituisce ovunque la metrica piatta con la metrica generale,  $\eta_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\beta}$ .

Tali sostituzioni restituiscono, in virtù del principio di covarianza generale, le equazioni in presenza di campo gravitazionale a partire da quelle in assenza di campo della relatività ristretta.

<sup>12</sup>Ad esempio i tensori metrici di spazi con torsione.



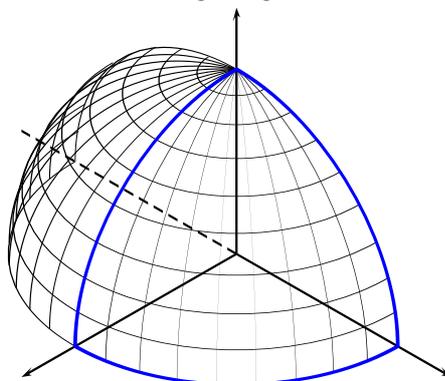
# Capitolo 2

## La formulazione delle Equazioni di Campo

### 2.1 Il Tensore di Curvatura

Introdurremo ora il concetto di curvatura dello spazio.

È noto che in geometria piana la somma degli angoli interni di un triangolo è  $180^\circ$  ( $\pi$  in radianti). Su di una superficie curva ciò evidentemente non è più vero. Infatti si consideri a titolo di esempio una superficie sferica (si faccia riferimento alla figura). Su tale sfera si consideri ora un triangolo che ha i lati formati da due mezzi meridiani e dalla porzione di equatore delimitata da essi. È facile rendersi conto che la somma degli angoli interni è maggiore di  $\pi$ : già la somma degli angoli di base è  $\pi$ , essendo per definizione i meridiani ortogonali ai paralleli. In particolare, se si scelgono come lati due meridiani ortogonali fra loro la somma degli angoli interni vale addirittura  $3/2\pi$ .



Formalizzeremo ora questo importante concetto. Supponiamo che la sfera abbia raggio  $R$  e che l'area del triangolo sferico sia  $A$ . Allora si verifica la seguente relazione:<sup>1</sup>

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{A}{R^2}$$

Tale relazione ci permette di definire la *curvatura* nel modo seguente:

$$\underbrace{\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{A}}_{\text{definizione}} \quad \left( \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{A} = \frac{1}{R^2} \equiv k^2 \right) \quad (2.1)$$

<sup>1</sup>Per rendersene conto, nel caso particolare dell'esempio si ha che l'area del triangolo scelto è esattamente  $1/8$  di superficie sferica, quindi:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{1}{8} \cdot 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{R^2} = \frac{1}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{2}\pi$$

La relazione (2.1) definisce la cosiddetta *curvatura interna*: il termine vuole rendere l'idea del fatto che la curvatura di uno spazio è definita utilizzando relazioni interne allo spazio e non come osservata da uno spazio a dimensione superiore.

La conseguenza fondamentale di uno spazio a curvatura diversa da zero si ha nel trasporto parallelo. In geometria piana, il trasporto parallelo di un vettore lungo una curva chiusa riporta il vettore in sé stesso (questo risulta evidente dalla definizione di trasporto parallelo). Il fatto fondamentale è che invece in uno spazio curvo il trasporto parallelo di un vettore da un punto ad un altro fornisce risultati diversi se effettuato lungo traiettorie diverse. E quindi, se effettuato lungo un percorso chiuso, non riporta il vettore in sé stesso ma questo risulta ruotato: si può immaginare ciò che accade visualizzando il trasporto parallelo lungo il rettangolo sferico dell'esempio precedente. Questo permette di considerare la "rotazione" subita da un vettore lungo un percorso chiuso come un'indicazione della presenza di curvatura. Si consideri quindi l'equazione della geodetica:

$$\frac{d}{ds}A_\mu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \frac{dx^\lambda}{ds}A_\nu = 0$$

questa equazione può essere integrata ottenendo:

$$A_\mu = \oint \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A_\nu dx^\lambda + A_\mu(p) \quad (2.2)$$

La condizione di integrabilità si può ottenere considerando una generalizzazione del teorema di Stokes, sulla quale spenderemo poche parole.

Nello spazio tridimensionale l'elemento di superficie è dato dall'area del parallelogramma costruito con due vettori sui piani coordinati. Si considera quindi il vettore normale alla superficie e con modulo eguale all'area. Per analogia, nello spazio quadridimensionale l'elemento infinitesimo di superficie è determinato dal tensore antisimmetrico di rango due  $df_{\alpha\beta} = dx^\alpha dx'^\beta - dx^\beta dx'^\alpha$ , le cui componenti sono eguali alle proiezioni dell'area dell'elemento sui piani coordinati. Nello spazio quadridimensionale è però impossibile considerare il vettore normale alla superficie, si può tuttavia costruirne la generalizzazione tramite il tensore duale, definito come:

$$df^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} df_{\gamma\delta}$$

Nel caso di un integrale esteso ad una curva chiusa quadridimensionale  $\Gamma$ , esso si può trasformare in un integrale esteso alla superficie da essa delimitata  $\Sigma$  con la sostituzione:

$$dx^\alpha = df^{\alpha\beta} \partial_\beta$$

cioè in definitiva:

$$\oint_\Gamma A_\alpha dx^\alpha = \int_\Sigma \partial_\beta A_\alpha df^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int_\Sigma (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) df^{\alpha\beta}$$

Nel caso in esame la relazione (2.2) assume la forma:

$$\oint \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A_\nu dx^\lambda = \frac{1}{2} \int (\partial_\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A_\nu - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\alpha}^\nu A_\nu) df^{\alpha\lambda}$$

che per essere integrabile deve verificare:

$$(\Gamma_{\mu\lambda}^\nu A_\nu)_{,\alpha} - (\Gamma_{\mu\alpha}^\nu A_\nu)_{,\lambda} = 0$$

e tale operazione può essere interpretata come un operatore che agisce sul vettore  $A_\nu$ :

$$\boxed{R_{\mu\lambda\alpha}^\nu A_\nu = 0}$$

dove la quantità  $R_{\mu\lambda\alpha}^\nu$  dipende dalla connessione  $\Gamma$  e dalla sue derivate prime. Riconsideriamo ora l'equazione:

$$\frac{d}{ds}A_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{ds}A_\lambda$$

e integriamo tra due punti vicini, in modo da poter espandere  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  e  $A_\lambda$  in serie senza tuttavia trascurare la curvatura:

$$A_\mu''(\rightarrow p) - A_\mu(p) = \oint \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda \frac{dx^\nu}{ds} ds$$

dove  $A_\mu''(\rightarrow p)$  rappresenta il vettore trasportato parallelamente nel punto  $p$ . Espandendo in serie:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x}) + (x^\rho - \bar{x}^\rho) \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\lambda|_{x=\bar{x}} + \dots \\ A_\mu(s) &= A_\mu(s_0) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x}) [x^\nu(s) - \bar{x}^\nu] A_\lambda(s_0) + \dots \end{aligned}$$

dove  $s$  indica l'ascissa curvilinea e  $s_0$  è l'ascissa del punto iniziale  $\bar{x}$ .

$$A_\mu''(s) = A_\mu(s_0) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda \int_{s_0}^{s_0} \frac{dx^\nu}{ds} ds + \left[ \frac{\partial}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right] \cdot A_\sigma(s_0) \int_{s_0}^{s_0} (x^\rho - \bar{x}^\rho) \frac{dx^\nu}{ds} ds$$

il primo integrale è evidentemente nullo, nel secondo integrale il termine in  $\bar{x}^\rho \frac{dx^\rho}{ds}$  dà anche contributo nullo, quindi rimane:

$$A_\mu''(s) = A_\mu(s_0) + \left[ \frac{\partial}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right] \cdot A_\sigma(s_0) \int_{s_0}^{s_0} x^\rho \frac{dx^\nu}{ds} ds$$

dove vale la relazione:

$$\int x^\rho dx^\mu = - \int x^\mu dx^\rho$$

tale termine risulta legato all'area spazzata dal vettore trasportato parallelamente. Essendo tale integrale antisimmetrico, il termine risultante è antisimmetrico anch'esso. Allora antisimmetrizzando la relazione precedente si ottiene (indicando la differenza dei due vettori come  $\Delta A_\mu = A_\mu''(s) - A_\mu(s_0)$ ):

$$\Delta A_\mu = R_{\mu\nu\rho}^\sigma A_\sigma \oint x^\rho dx^\nu$$

dove è stata definita la quantità:

$$R_{\mu\nu\rho}^\sigma \equiv \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \Gamma_{\mu\rho}^\lambda - \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \quad (2.3)$$

e l'unico modo perché il vettore rimanga invariato per trasporto parallelo è che risulti  $R_{\mu\nu\rho}^\sigma = 0$ .

Esiste un modo alternativo per ricavare lo stesso risultato. Detta  $\Delta A_\mu$  la variazione del vettore per trasporto parallelo lungo una curva chiusa e  $\delta A_\mu$  la variazione del vettore per trasporto parallelo tra due punti, allora risulta evidente che:

$$\Delta A_\mu = \oint \delta A_\mu$$

Ricordando che:<sup>2</sup>

$$\delta A_\mu = \oint \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha dx^\nu$$

e dovendo risultare  $\Delta A_\mu = \delta A_\mu$  nel caso che il trasporto parallelo non dipenda dal percorso (la notazione utilizzata qui è la stessa di quella in §1.3), si ricava:

$$\Delta A_\mu = \oint \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha dx^\nu \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu = -\Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\alpha \quad (2.4)$$

se tale relazione vale  $\forall A_\alpha$ , la connessione si dice integrabile. Se inoltre la connessione è simmetrica, e cioè se vale il teorema di Schwarz, si trova:

$$\frac{\partial^2}{x^\lambda x^\nu} A^\mu = -\partial_\lambda \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\alpha \quad ; \quad \frac{\partial^2}{x^\nu x^\lambda} A^\mu = -\partial_\nu \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu A^\alpha$$

<sup>2</sup>Tale relazione si può ricavare immediatamente dalla (2.2).

da cui:

$$\begin{aligned} -\partial_\lambda (\Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\alpha) + -\partial_\nu (\Gamma_{\alpha\lambda}^\mu A^\alpha) &= 0 \\ \partial_\lambda (\Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\alpha) - \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \partial_\lambda A^\alpha + \partial_\nu (\Gamma_{\alpha\lambda}^\mu A^\alpha) + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \partial_\nu A^\alpha &= 0 \end{aligned}$$

e sostituendo la (2.4):

$$[(-\partial_\lambda \Gamma_{\alpha\nu}^\mu + \partial_\nu \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu) A^\alpha + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha A^\beta + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha A^\beta] = 0$$

ovvero:

$$R_{\alpha\lambda\nu}^\mu = 0$$

dove si è posto:

$$R_{\alpha\lambda\nu}^\mu \equiv -\partial_\lambda \Gamma_{\alpha\nu}^\mu + \partial_\nu \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu + \Gamma_{\beta\nu}^\mu \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta - \Gamma_{\beta\lambda}^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$$

che è esattamente la relazione già ottenuta in (2.3).

L'oggetto così costruito è il *tensore di curvatura* o di *Riemann-Cristoffel*. La connessione integrabile implica appunto che  $R_{\alpha\lambda\nu}^\mu = 0 \quad \forall A_\mu$ , cioè, anticipandone l'interpretazione, che lo spazio sia a curvatura nulla (ovvero "piatto").

Ricordando la notazione di antisimmetrizzazione, il tensore si può riscrivere in una forma più compatta, come segue:

$$R_{\mu\nu\rho}^\sigma = 2 \left( \Gamma_{\mu[\nu,\rho]}^\sigma + \Gamma_{\mu[\nu}^\alpha \Gamma_{\rho]\alpha}^\sigma \right)$$

Quanto detto finora permette di concludere che *il trasporto parallelo non può generare un campo tensoriale a partire da un tensore dato in un punto*.

Sia dato ora un vettore  $V_\mu$ . La sua derivata  $V_{\mu;\nu}$  è un tensore di ordine superiore. Se vale il teorema di Schwarz risulta verificata la seguente relazione:

$$V_{\mu;\nu;\lambda} - V_{\mu;\lambda;\nu} = 0$$

ma in uno spazio curvo si è visto che risulta:

$$V_{\mu;\nu;\lambda} - V_{\mu;\lambda;\nu} = -R_{\mu\nu\lambda}^\sigma V_\sigma \quad (2.5)$$

Questo significa che in uno spazio curvo il teorema di Schwarz non vale. D'altra parte la stessa (2.5) garantisce che la quantità  $R_{\mu\nu\lambda}^\sigma$  sia effettivamente un tensore: ciò risulta chiaro se si considera che sul lato sinistro dell'equazione sono presenti solo tensori e che sul lato destro è presente il vettore  $V_\sigma$ . Se si ricorda che la connessione dipende dalla metrica e dalle sue derivate prime, si deduce che il tensore di Riemann dipende dalla metrica, dalle sue derivate prime e dalle sue derivate seconde. La caratteristica essenziale è che esso dipende *linearmente* dalle derivate seconde: proprietà molto importante, come sarà chiaro nel seguito.

Tale tensore, essendo del quarto ordine, ha  $4^4 = 256$  componenti. Ma ricordando che non tutte le componenti del tensore metrico sono indipendenti, si intuisce che tra di esse devono sussistere delle relazioni. A tal fine introduciamo il tensore completamente covariante  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  ricavato per abbassamento dell'indice controvariante tramite il tensore metrico. Le relazioni che sussistono fra le componenti sono allora le seguenti:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\beta\alpha\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} &= 0 \end{aligned}$$

tali relazioni riducono le componenti del tensore a 20.

Il tensore di Riemann così definito è l'**unico tensore** costruito con  $g$ ,  $g'$  e  $g''$  e lineare in  $g''$ .<sup>3</sup> Questa caratteristica permette di risolvere le equazioni per le derivate seconde e consente l'introduzione di condizioni iniziali (almeno in linea di principio).

<sup>3</sup>Nel senso: ogni altra quantità costruita a partire da  $g$ ,  $g'$  e  $g''$  e lineare in  $g''$  non ha le proprietà di un tensore.

Contraendo il tensore di curvatura si ricava un tensore a 10 componenti che può pertanto essere facilmente messo in relazione con la metrica, che ha anch'essa 10 componenti. Per convenzione, si contrae sul secondo indice covariante:

$$R_{\beta\alpha\delta}^{\alpha} \equiv R_{\beta\delta} \quad \text{Tensore di Ricci}$$

Contraendo ulteriormente, si ricava uno scalare:

$$R_{\lambda}^{\lambda} \equiv R \quad \text{Curvatura Scalare}$$

questo scalare è l'equivalente della curvatura interna nell'esempio della sfera fatto precedentemente, corrisponde quindi in un certo senso al concetto "classico" di curvatura.

Vale inoltre l'importante relazione:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\lambda} + R_{\alpha\beta\delta\lambda;\gamma} + R_{\alpha\beta\lambda\gamma;\delta} = 0 \quad \text{Identità di Bianchi}$$

innalzando preliminarmente l'indice  $\alpha$  a controvariante nella relazione di Bianchi e contraendo gli indici  $\alpha$  e  $\gamma$  nell'identità di Bianchi si ottiene:

$$R_{\beta\alpha\delta;\lambda}^{\alpha} + R_{\beta\delta\lambda;\alpha}^{\alpha} + R_{\beta\lambda\alpha;\delta}^{\alpha} = 0$$

che conduce, considerando che il tensore di Ricci è stato definito come la contrazione fra l'indice controvariante ed il secondo indice covariante:

$$R_{\beta\delta;\lambda} + R_{\beta\delta\lambda;\alpha}^{\alpha} + R_{\beta\lambda;\delta} = 0$$

ripetendo la stessa operazione sull'indice  $\beta$  e contraendo con l'indice  $\delta$ :

$$0 = R_{;\lambda} + R_{\lambda\beta;\alpha}^{\alpha\beta} - R_{\lambda;\beta}^{\beta} = R_{;\lambda} - R_{\lambda\beta;\alpha}^{\beta\alpha} - R_{\lambda;\beta}^{\beta} = R_{;\lambda} - R_{\lambda;\alpha}^{\alpha} - R_{\lambda;\beta}^{\beta} = 0$$

essendo l'indice  $\beta$  muto, lo si può senz'altro chiamare  $\alpha$ , ottenendo:

$$R_{;\lambda} - 2R_{\lambda;\alpha}^{\alpha} = 0 \Rightarrow \left( R^{\delta\lambda} - \frac{1}{2}g^{\delta\lambda}R \right)_{;\lambda} \equiv G_{;\lambda}^{\delta\lambda} = 0$$

dove è stato definito l'importantissimo tensore a derivata covariante nulla:

$$G^{\alpha\beta} \equiv \left( R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R \right) \quad \text{Tensore di Einstein}$$

## 2.2 Il Tensore Energia-Impulso ed il Principio Variazionale

La formulazione del campo gravitazionale tramite le equazioni di campo che ci si avvia a costruire richiede di trattare la materia in termini di un tensore. Tale tensore si indica con  $T_{\mu\nu}$  e prende il nome di *tensore Energia-Impulso*.

Nell'approccio qui seguito per ricavare questo tensore, le componenti sono definite in modo da poter essere interpretate come segue:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \text{densità di massa (di energia)}\rho \\ T_{0k} &= \text{flusso di } k \text{ lungo la direzione } 0 \text{ (tempo)} \\ T_{k0} &= \text{componente del flusso lungo } k \\ T_{jk} &= \text{componente } k\text{-esima della forza lungo } j \end{aligned}$$

Le componenti  $T_{jk}$  rappresentano quindi le componenti del tensore degli sforzi classico. Considerando la relazione relativistica  $E = mc^2$ , si trova:

$$T_{0k} = E \cdot v^k = M \cdot p^k = T_{k0} \quad \Rightarrow \quad T_{0k} = T_{k0}$$

e quindi la sua forma generale è:

$$T_{\alpha\beta} = \left( \begin{array}{c|ccc} \rho & p_x & p_y & p_z \\ \hline -p_x & & & \\ -p_y & & \sigma_{ij} & \\ -p_z & & & \end{array} \right)$$

dove  $\rho$  rappresenta la densità,  $p_i$  è la componente di impulso trasferita lungo la direzione  $i$ -esima e  $\sigma_{ij}$  è il tensore degli sforzi di Maxwell.

Si può dimostrare in base ad un semplice ragionamento classico che questo tensore deve essere simmetrico. Si consideri a tale scopo un volume cubico  $V = L^3$ . Il tensore di inerzia è dunque proporzionale a  $L^5$ . Il momento  $\tau$  lungo l'asse  $z$  è dato da:

$$\tau_z = -(T_{yx}L^2)\frac{L}{2} + (T_{yx}L^2)\left(-\frac{L}{2}\right) - (-T_{xy}L^2)\frac{L}{2} - (T_{xy}L^2)\frac{L}{2}\left(-\frac{L}{2}\right)$$

dove i quattro termini rappresentano le forze agenti sulle quattro facce che danno contributi di momento lungo l'asse  $z$  (due parallele all'asse  $x$  e due parallele all'asse  $y$ ). Riordinando i termini si ottiene:

$$\tau_z \propto L^3 (T_{xy} - T_{yx})$$

Se si manda il volumetto elementare scelto a zero, se cioè lo si rende infinitesimo, ci si accorge che il momento di inerzia va a zero molto più rapidamente del momento  $\tau$ : Ciò significa che l'accelerazione divergerebbe (ricordiamo che essa dipende dall'inverso del momento di inerzia), in quanto basterebbe un momento infinitamente piccolo per produrre un'accelerazione arbitrariamente grande. Poiché questo è fisicamente impossibile, ne deve conseguire che:

$$T_{xy} - T_{yx} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{ij} \text{ è simmetrico}$$

Costruiremo ora il tensore per alcuni sistemi fisici semplici, ma di grande utilità.

Consideriamo in primo luogo il caso di un insieme di **particelle libere**.

$$T^{\alpha 0}(\vec{x}, t) = \sum_n p_n^\alpha(t) \delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{x}(t)]$$

$$T^{\alpha k}(\vec{x}, t) = \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx^k}{dt} \delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{x}(t)]$$

essendo  $dx^0 = dt$  l'espressione di sopra si può riscrivere in una forma in cui è evidente la covarianza:

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{E_n} \delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{x}(t)] \quad p^\alpha = E \frac{dx^\alpha}{dt}$$

ed introducendo il quadrivettore posizione  $x^\alpha$  al posto di  $(\vec{x}, t)$ :

$$T^{\alpha\beta} = \int \sum_n \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{E_n} \delta^{(4)}[x^\alpha - x^\alpha(\tau)] d\tau$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che si può far comparire una  $\delta(x)$  a patto di integrare sulla variabile:  $\int \delta(x) dx = 1$ . Per particelle libere risulta soddisfatta la  $T_{,\beta}^{\alpha\beta} = 0$ .

Introduciamo ora un **campo elettromagnetico**. In tali condizioni  $T_{part.,\beta}^{\alpha\beta} \neq 0$ , dove il pedice “part.” sta ad indicare il solo contributo delle particelle. In realtà vale:

$$T_{part.,\beta}^{\alpha\beta} = F_{\gamma}^{\alpha} j^{\gamma}$$

dove  $F_{\gamma}^{\alpha}$  è il tensore elettromagnetico e  $j^{\nu} \equiv (\rho, \vec{j})$  è il quadrivettore corrente. Se si vuole conservare l’uguaglianza a zero della derivata del tensore Energia-Impulso anche in questo caso, bisogna introdurre un termine che bilanci la variazione delle particelle, cioè in pratica:

$$T_{e.m.,\beta}^{\alpha\beta} = -F_{\gamma}^{\alpha} j^{\gamma}$$

ed in tal caso il tensore totale (somma dei due tensori, quello relativo al contributo delle particelle e al contributo del campo elettromagnetico) è proprio a divergenza nulla. Questo corrisponde a dire semplicemente che se il tensore delle particelle non si conserva, la sua variazione è “assorbita” dal campo. In pratica è l’analogo del teorema di Poynting: se l’energia di un sistema di cariche non si conserva è perché quest’energia si è trasferita al campo. In questo caso si dice che il campo assorbe la variazione di momento delle particelle e che nel complesso si conserva sia l’energia che il momento. Nel caso considerato, la componente elettromagnetica (ovvero il *tensore Energia-Impulso elettromagnetico*) è data da:

$$T_{e.m.}^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

e ricordando la relazione che definisce il tensore elettromagnetico in termini di quadripotenziale  $A_{\alpha} \equiv (\phi, \vec{A})$ :

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

si ricava facilmente:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{2} (E^2 + B^2) && \text{Densità di energia} \\ T^{0i} &= (\vec{E} \times \vec{B}) && \text{Vettore di Poynting} \\ T^{jk} &= \frac{1}{2} \delta^{jk} (E^2 + B^2) - (E^j E^k + B^j B^k) \end{aligned}$$

Consideriamo infine un **fluido perfetto**, cioè un fluido isotropo nel sistema di riferimento solidale ad esso.

A causa dell’assenza di sforzi di taglio (viscosità) il tensore Energia-Impulso deve essere diagonale:

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

e per un osservatore con quadrivelocità  $u^{\alpha} = dx^{\alpha}/ds$ :

$$T'^{\alpha\beta} = (\rho + p) u^{\alpha} u^{\beta} + p \eta^{\alpha\beta} \qquad T'^{\alpha\beta} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} T^{\mu\nu}$$

Se si richiede che il flusso del tensore sia nullo attraverso una superficie chiusa, allora il teorema di Gauss quadridimensionale assicura che il tensore energia-impulso è a divergenza nulla:

$$\int_R \vec{\nabla} \cdot \vec{T} d\Omega = \int_{\partial R} \vec{T} \cdot d\Sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = 0$$

dove si è indicato con  $R$  un volume generico e  $\partial R$  la sua frontiera,  $\vec{T}$  è il tensore Energia-Impulso,  $d\Omega$  e  $d\Sigma$  sono rispettivamente gli elementi di volume e di ipersuperficie nello spazio quadridimensionale.

Nel limite non relativistico in cui  $p/\rho \ll 1^4$  e  $\gamma \cong 1$ , si ricavano le relazioni:

$$\begin{aligned} T^{00} &\cong \rho u^0 u^0 - p = \rho - p \cong \rho \\ T^{0k} &\cong \rho u^0 u^k = \rho v^k \\ T^{jk} &\cong \rho v^j v^k + \delta^{jk} p \end{aligned}$$

<sup>4</sup>In unità naturali, in realtà  $p/\rho \ll c^2$ .

La conservazione del tensore permette di scrivere:

$$\begin{cases} T_{,k}^{0k} + T_{,0}^{00} = 0 \\ T_{,0}^{j0} + T_{,k}^{jk} = 0 \end{cases}$$

che forniscono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k) &= 0 && \rightarrow \text{Equazione di continuità} \\ \frac{\partial}{\partial t} v^j + \frac{\partial}{\partial x^k}(v^j v^k) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^k}(p \delta^{jk}) && \rightarrow \text{Equazione del moto} \end{aligned}$$

### 2.2.1 Il Principio Variazionale e l'invarianza per trasformazioni

Si dice ora un metodo generale molto utile per ricavare l'equazione del moto, il cosiddetto *principio variazionale*.

Si definisce *integrale d'azione* il seguente funzionale:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$$

Il principio variazionale applicato all'azione prende il nome di *principio di minima azione*, ed asserisce che l'equazione del moto si ricava imponendo che l'azione abbia un estremo, ovvero che  $\delta S = 0$ . Si formalizzerà subito questa asserzione.

Sia  $y(x)$  il percorso di una particella, con estremi  $x_1$  e  $x_2$ . Si supponga di parametrizzare una piccola variazione del percorso come segue:

$$\begin{aligned} y(x, \alpha) &= y(x) + \alpha \eta(x) && \alpha \text{ piccolo} \\ \eta(x_1) = \eta(x_2) &= 0 && y(x) = y(x, \alpha)|_{\alpha=0} \end{aligned}$$

cioè si considerano tutti i percorsi  $y(x, \alpha)$  ottenibili tramite una piccola deformazione della curva, mantenendo però gli estremi fissi ed imponendo che l'annullarsi del parametro  $\alpha$  restituisca la curva originaria  $y(x)$ . Per fini pratici si può pensare  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Allora il funzionale d'azione assume la forma generica:

$$F \equiv F(x, \alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha); y'(x, \alpha); x] dx$$

e la condizione di minimo assume la forma:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, \alpha) \right|_{\alpha=0} = 0$$

Tenendo presente la forma di  $F(x, \alpha)$  e sviluppando la condizione di minimo:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, \alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} \right] dx$$

ed integrando per parti sulla variabile  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, \alpha) = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

ponendo  $\alpha = 0$  e tenendo presente che  $\partial y / \partial \alpha = \eta(x)$  e che  $\eta(x)$  si annulla agli estremi:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, \alpha) \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} dx$$

denotando  $(\partial y / \partial \alpha) \delta \alpha|_{\alpha=0}$  con  $\delta y$ , si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, \alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \delta y dx$$

e dovendo essere  $\delta F = 0$  indipendentemente da  $\delta y$ , deve risultare:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

Questa è la forma generale delle equazioni del moto. Nel caso specifico  $f$  coincide con la lagrangiana del sistema,  $f(y(x), y'(x), x) \rightarrow L(x(t), x'(t), t)$ , si riconosce facilmente in questa equazione l'equazione di Eulero-Lagrange, che è in effetti l'equazione del moto cercata.

Il tensore Energia-Impulso si può ricavare richiedendo che la lagrangiana sia invariante per traslazioni. Per fare ciò si introduce una *densità di lagrangiana*, formalismo peraltro necessario quando si trattano sistemi continui, definita come:

$$L = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^3x \quad \phi(x_i) \text{ scalari}$$

le traslazioni sono espresse da:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

richiedere pertanto che la lagrangiana sia invariante per traslazioni significa in primo luogo dire che una variazione del campo  $\phi$  induce una variazione di  $\mathcal{L}$  tale che questa vari solo per una costante.

La variazione  $\delta \mathcal{L}$  è composta di due pezzi:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \partial_\mu \phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right]$$

uno di essi si riconosce essere l'equazione del moto (scritta con un formalismo covariante), che lungo un moto materiale è nullo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0$$

e l'altro termine è una divergenza totale. Affinché  $L$  sia invariante,  $\mathcal{L}$  deve giusto variare per una costante, e quindi per una divergenza totale. Indicando questo termine con  $\partial_\mu \Lambda_\mu$ , lungo un moto deve risultare:

$$\partial_\mu \Lambda_\mu = \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right] \Rightarrow \partial_\mu \left[ \Lambda_\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right] = 0 \quad (2.6)$$

Si riprenda in considerazione una generica traslazione. Oltre ad una variazione sulla densità di lagrangiana dovuta a  $\phi$ , una traslazione di  $x$  induce una variazione sul campo  $\phi(x)$  stesso:

$$\begin{aligned} x^\mu \rightarrow x'^\mu &\Rightarrow \phi \rightarrow \phi' : \phi(x) = \phi'(x') \\ \delta \phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) &= \phi(x - \delta x) - \phi(x) = -\partial_\mu \phi \delta x^\mu \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio è consistito in una espansione in serie al I° ordine in  $\delta x$ . Essendo la lagrangiana uno scalare per essa vale l'analogo:

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = -\partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu$$

Tale termine si può riscrivere come una divergenza totale. Dall'equazione (2.6):

$$\begin{aligned} -\partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) &= \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} (-\partial_\nu \phi \delta x^\nu) \right] \Rightarrow \partial_\mu \left[ \mathcal{L} \delta x^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi \delta x^\nu \right] = 0 \Rightarrow \\ -\partial_\mu \left\{ \delta x^\nu \left[ \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi \right] \right\} &= \delta x^\nu \partial_\mu \left[ \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi \right] = 0 \quad \forall \delta x^\nu \end{aligned}$$

risulta allora definibile un tensore del II° ordine che risulta conservato:

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\partial_\nu\phi$$

e l'invarianza per traslazioni implica che la divergenza del tensore sia nulla. È facile mostrare per scrittura diretta delle componenti che esistono quattro correnti conservate, corrispondenti alle quattro combinazioni  $T_{4\mu}$ . La componente  $T_{44}$  è legata all'energia (ed in realtà fornisce una *densità di Hamiltoniana*), mentre le componenti  $T_{4i}$  forniscono l'*impulso associato al campo*  $\phi$ .

Il tensore così definito non ha una particolare simmetria, e per di più non è definito univocamente. Se si aggiunge una divergenza totale (che non cambia la fisica) complessivamente antisimmetrica, si ottiene una definizione simmetrica del tensore, peraltro necessaria se si vuole definire il momento angolare in maniera analoga al caso classico.

La definizione di un tensore momento angolare segue la strada tracciata per il tensore Energia-Impulso, con la richiesta in questo caso che la lagrangiana sia invariante per rotazioni del sistema.

## 2.3 Le Equazioni di Campo

Tutte le relazioni ricavate nel §2.1 sono relazioni di natura essenzialmente geometrica, che non hanno per il momento alcuna relazione con la natura fisica.

Le equazioni di campo che otterremo dovranno evidentemente essere consistenti con le equazioni di Newton  $\nabla^2\phi = \varrho$ . In questa sede le equazioni di campo verranno introdotte in modo intuitivo, seguendo il percorso logico che guidò Einstein alla loro scrittura, senza quindi utilizzare il principio variazionale.

Si è già ricavata la relazione nel limite newtoniano  $g_{00} = (1 + 2\phi)$ , allora la  $\nabla^2\phi = \varrho$  si può riscrivere nella forma:

$$\vec{\nabla}g_{00} = T_{00}$$

a meno di costanti. Questa scrittura permette di intuire una relazione fra la metrica  $g_{\alpha\beta}$  ed il tensore  $T_{\alpha\beta}$ . Tale relazione viene dettata da un operatore  $\mathfrak{R}$  che agisce sulla metrica come:

$$\mathfrak{R}(g_{\alpha\beta}) = kT_{\alpha\beta}$$

con la richiesta che sia lineare nelle derivate seconde del tensore metrico. In un primo momento si può pensare di utilizzare il tensore di Ricci  $R^{\alpha\beta}$ , che ha lo stesso numero di componenti della metrica, e quindi scrivere le equazioni come:

$$R^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta}$$

Notando però che l'equazione

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$$

restituisce l'equazione di continuità e l'equazione di bilancio di un fluido, ci si accorge che, a differenza delle equazioni di Maxwell, le *equazioni di campo cercate possono contenere in sé le equazioni del moto*.<sup>5</sup> Per ottenere ciò, si deve trovare un tensore, dipendente dalla metrica nel modo già descritto,<sup>6</sup> che sia in più a divergenza nulla.<sup>7</sup> Un tensore di questo tipo è già stato costruito: è il tensore di Einstein  $G^{\alpha\beta}$ . Quindi le equazioni cercate sono del tipo:

$$G^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta}$$

<sup>5</sup>Il lettore con una buona preparazione di meccanica quantistica sa certamente che le equazioni di Maxwell sono le equazioni del moto del campo elettromagnetico. Quello che si intende qui è che le equazioni cercate possono contenere in sé sia le equazioni del campo (equivalenti a quelle di Maxwell per l'elettromagnetismo) sia le equazioni del moto della materia, ovvero quelle di Newton.

<sup>6</sup>E cioè lineare nelle derivate seconde della metrica.

<sup>7</sup>Questo perché il fatto che il membro a sinistra dell'equazione sia a divergenza nulla impone che  $T^{\alpha\beta}$  sia anch'esso a divergenza nulla. Il che equivale a dire che l'equazione così costruita garantisce automaticamente l'equazione di continuità e di bilancio, da cui le equazioni del moto.

La costante si ricava imponendo che nel limite classico si riducano alle equazioni di Newton. Quindi in definitiva:

$$\boxed{R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}} \quad (2.7)$$

Queste sono le cosiddette *Equazioni di Einstein*.

Le equazioni (2.7) costituiscono un sistema di 10 equazioni differenziali alle derivate parziali autoaccoppiate. Esse sono le equazioni del moto del campo gravitazionale in presenza di materia e comprendono in sé sia il moto delle particelle che producono il campo e sia l'interazione con il campo stesso. Quindi, a differenza di ciò che avviene in elettromagnetismo, non si può disaccoppiare il moto delle particelle nel campo dall'interazione con il campo stesso e risolvere separatamente i due problemi.

L'uguaglianza dei due tensori simmetrici espressa dalla (2.7) determina 10 equazioni in 10 incognite. Supponiamo che siano presenti le sole equazioni di campo. Vale la pena di notare che se si effettua una trasformazione di coordinate  $f: R^{\alpha\beta} \mapsto R'^{\alpha\beta}$  che manda  $R^{\alpha\beta}$ , con soluzione  $g^{\alpha\beta}$ , in  $R'^{\alpha\beta}$ , allora la trasformazione effettuata su  $f: g^{\alpha\beta} \mapsto g'^{\alpha\beta}$  a priori non si può dire che fornisca una soluzione di  $R'^{\alpha\beta}$ . Questo perché nella condizione considerata la soluzione non è un tensore, ma un "insieme di funzioni", che pertanto non può essere trasformato in un altro sistema di riferimento. Perché questo sia valido bisogna introdurre dei vincoli supplementari (per la precisione delle relazioni funzionali) che sono rappresentati proprio dall'identità di Bianchi. In realtà sia le equazioni di campo che l'identità di Bianchi sono entrambe derivate dalla particolare struttura che il tensore di Riemann dà allo spazio-tempo: le condizioni quindi sono già implicite.

La novità apportata dall'identità di Bianchi può essere compresa anche in un altro modo. Sebbene le componenti del tensore metrico  $g^{\alpha\beta}$  siano 10, esse vengono ridotte a 6 dalla identità di Bianchi. Un arbitrario passaggio di coordinate impiega 4 componenti: quindi si può effettuare una trasformazione su  $g^{\alpha\beta}$  che la renda soluzione dell'equazione trasformata.

Le equazioni (2.7) permettono soluzioni di portata più ampia rispetto al moto delle particelle, esse cioè permettono di ricavare anche soluzioni di interesse cosmologico. Le (2.7) comunque non ammettono soluzioni che siano *statiche e stabili*: soluzioni di questo tipo sono possibili solo se si introduce un termine che corrisponde ad una "forza repulsiva". Questo corrisponde tecnicamente all'introduzione della costante cosmologica  $\Lambda$ , che modifica le equazioni in questo modo:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}$$

Chiaramente la costante cosmologica deve essere abbastanza piccola da assicurare la stabilità del sistema solare almeno per un periodo corrispondente alla sua età (in tal modo si garantisce che esso sia stato stabile *almeno* fino ad oggi):<sup>8</sup> il limite così stimato corrisponde a  $|\Lambda| \approx 10^{-56}$ . L'introduzione della costante  $\Lambda$  storicamente fu dovuto essenzialmente al pregiudizio che l'universo dovesse essere statico, mentre le equazioni di Einstein non prevedevano soluzioni di questo tipo. Con la scoperta del moto di recessione delle galassie, dovuta ad Hubble (che formulò la legge che porta il suo nome), apparve chiaro però che l'universo non poteva essere statico ma che doveva essere in espansione; quindi la costante cosmologica fu abbandonata per diverso tempo. Attualmente, anche se in una forma diversa questa costante ha riacquisito interesse, una costante cosmologica variabile nel tempo può infatti descrivere i comportamenti inflattivi dell'universo. Una sommaria descrizione di questi modelli è data in §4.6.

Riscriviamo le equazioni (2.7) tramite il tensore metrico nella forma:

$$R_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2}\delta_{\beta}^{\alpha}R = -T_{\beta}^{\alpha}$$

dove si è tenuto presente che  $g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$ , e si sono trascurate le costanti. Contraendo questa equazione si ricava:

$$R - 2R = -T \quad \Rightarrow \quad R = T$$

<sup>8</sup>Questo perché come detto essa rappresenta un termine aggiuntivo alla forza gravitazionale, repulsivo se positivo e attrattivo se negativo. Dunque un valore assoluto troppo grande tende a far "esplodere" o "implosere" troppo velocemente il sistema. Si deve quindi porre un limite superiore al valore assoluto della costante per garantire che il sistema solare non sia ancora "esploso".

dove  $T$  è la traccia del tensore Energia-Impulso e  $R$  è la curvatura scalare. Risostituendo nelle (2.7) si trova una formulazione alternativa:

$$-\frac{8\pi G}{c^4} \left( T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} T \right) = R^{\alpha\beta}$$

nella quale è presente un solo termine dipendente dalla metrica.

Tenendo presente che vale la relazione seguente:

$$R^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha\mu\nu} T_{\mu\nu}^\beta$$

dove si è fatta la posizione:

$$\Gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta;\delta}^\nu g^{\mu\delta} + g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta;\delta}^\nu g^{\nu\delta}) \quad (2.8)$$

le derivate della connessione sono tutte nel termine  $\Gamma^{\mu\nu}$ . Se si definisce ulteriormente:

$$\Gamma^\nu \equiv g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \quad (2.9)$$

la relazione (2.8) diventa:

$$\Gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (\Gamma^{\mu;\nu} - \Gamma^{\nu;\mu}) \equiv \Gamma^{[\mu;\nu]}$$

Poiché la (2.9) si può riscrivere come:

$$\Gamma^\nu = -\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\beta (\sqrt{g} g^{\nu\beta})$$

e visto che l'espressione seguente si riduce al d'alambertiano  $\square$  nel caso di metrica piatta  $\eta_{\alpha\beta}$ :

$$-\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\beta (\sqrt{g} g^{\nu\beta} \partial_\nu) \rightarrow \square \text{ se } g^{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$$

in un sistema in cui vale  $\square x^\nu = 0$  segue che:

$$-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \Gamma^{\alpha\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = T^{\alpha\beta}$$

# Capitolo 3

## La Soluzione di Schwarzschild

La soluzione di Schwarzschild è la soluzione delle equazioni di campo nel caso di un corpo isotropo a simmetria sferica e statico.

Tale soluzione può essere estesa al caso in cui la metrica abbia la sola parte radiale variabile nel tempo (sfera pulsante) grazie al Teorema di Birkhoff.

### 3.1 La soluzione Esterna

Il fatto che il corpo che considereremo sia a simmetria sferica e statico implica che la metrica dipenderà solo dalla coordinata radiale  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e non avrà dipendenza temporale. Come è già noto, la metrica si può ricavare dalla definizione del quadrintervallo:

$$ds^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

ed è ovvio che deve contenere solo termini scalari rispetto alla rotazioni (in quanto, appunto, deve essere invariante per rotazione). Questi termini sono  $dx^2$ ,  $\vec{x} \cdot d\vec{x}$  e  $x^2$ ; quindi si può scrivere:

$$ds^2 = F(r)dt^2 - 2E(r)\vec{x} \cdot d\vec{x}dt - D(r)(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 - C(r)dx^2$$

Poiché il problema è a simmetria sferica, conviene passare in coordinate polari ricavando per semplice sostituzione:

$$ds^2 = F(r)dt^2 - 2rE(r)dtdr - r^2D(r)dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2)$$

e si vede che è presente solo un termine fuori diagonale. Effettuando una trasformazione di coordinate sul tempo del tipo  $t \rightarrow t' + \phi(r)$  tale da soddisfare la relazione:

$$\frac{d}{dr}\phi(r) = -r\frac{E(r)}{F(r)}$$

ne risulta una forma diagonale:

$$\begin{aligned} ds^2 &= F(r)dt^2 - G(r)dr^2 + C(r)(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2) \\ G(r) &= r^2 \left[ \frac{D(r) + E^2(r)}{F(r)} \right] \end{aligned}$$

la forma precedente si può ridurre ulteriormente come segue, considerando che c'è libertà nel ridefinire il raggio come  $r' \equiv C(r)r^2$ :

$$ds^2 = B(r')dt^2 - A(r')dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

e che mette in risalto il fatto che vi sono solo due equazioni incognite nella *sola* variabile  $r$ . Da tale forma si ricava la metrica e da questa, ricordando l'espressione della connessione in funzione della metrica, le componenti della connessione (indichiamo con l'apice la derivazione rispetto alle coordinate spaziali):

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{A'(r)}{2A(r)} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{A(r)} & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{r \sin^2 \theta}{A(r)} & \Gamma_{tt}^r &= \frac{B'(r)}{2A(r)} \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta & & & & \\ \Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r} & \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \cot \theta & & & & \\ \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{B'(r)}{2B(r)} & & & & & & \end{aligned}$$

$$g \equiv \det g_{\alpha\beta} = -A(r)B(r)r^4 \sin^2 \theta$$

essendo le altre componenti della connessione nulle.

Ricordiamo ora che le equazioni di campo sono:

$$-\frac{8\pi G}{c^4} \left( T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} T \right) = R^{\alpha\beta}$$

e consideriamo per ora solo la soluzione nella regione esterna alla massa sferica: in tal caso il tensore Energia-Impulso è nullo in quanto non sono presenti altri corpi in questa regione. In più, essendo la metrica in forma diagonale, tale sarà anche il tensore di Ricci. Pertanto le equazioni di campo si riducono alla forma seguente:

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

e scritta singolarmente per le componenti:

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{1}{2} \frac{B''(r)}{B(r)} - \frac{1}{4} \frac{B'(r)}{B(r)} \left[ \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right] - \frac{1}{r} \frac{A'(r)}{A(r)} = 0 \\ R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{1}{2} \frac{r}{A(r)} \left[ \frac{B'(r)}{B(r)} - \frac{A'(r)}{A(r)} \right] + \frac{1}{A(r)} = 0 \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta} = 0 \\ R_{tt} &= -\frac{1}{2} \frac{B''(r)}{A(r)} + \frac{1}{4} \frac{B'(r)}{A(r)} \left[ \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right] - \frac{1}{r} \frac{B'(r)}{A(r)} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

È interessante notare che la relazione su  $R_{\varphi\varphi}$  deriva dalla invarianza rotazionale della metrica. Sfruttando la prima e la quarta delle relazioni scritte sopra si vede che vale la seguente equazione:

$$\frac{R_{rr}}{A(r)} + \frac{R_{tt}}{B(r)} = -\frac{1}{rA(r)} \left[ \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right] = 0$$

dalla quale si ricava la seguente:<sup>1</sup>

$$\frac{B(r)A'(r) + A(r)B'(r)}{A(r)B(r)} = 0 \quad \Rightarrow \quad A(r)B(r) = \text{costante}$$

la quale impone un legame fra le funzioni  $A(r)$  e  $B(r)$ . La costante si ricava dalla richiesta che lontano dal corpo la metrica  $g_{\alpha\beta}$  si riduca alla metrica di Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$ : ciò porta ad attribuire alla

<sup>1</sup>Si noti che:

$$\frac{d}{dr} [A(r)B(r)] = B(r)A'(r) + A(r)B'(r)$$

e che ovviamente:

$$A(r)B(r) \neq \infty$$

costante il valore 1. Questa condizione prende il nome di *Piattezza asintotica* (*Asymptotic Flatness*) e deve essere imposta ogni volta che sono presenti corpi al finito.<sup>2</sup> La relazione fra le due funzioni è allora:

$$B(r) = \frac{1}{A(r)}$$

Tale relazione può essere infine sostituita nella relazione non ancora utilizzata, ottenendo:

$$R_{\theta\theta} = -1 + rB'(r) + B(r) \Rightarrow \frac{d}{dr} [rB(r)] = 1 \Rightarrow rB(r) = r + \text{costante}$$

La costante si ricava ricordando che nel limite newtoniano vale  $g_{00} = -(1 + 2\phi)$ . In questo caso risulta:

$$g_{00} = -B(r) = -1 - \frac{\text{costante}}{r} \Rightarrow \text{costante} = -2MG$$

da questo segue:

$$\begin{aligned} B(r) &= 1 - \frac{2MG}{r} \\ A(r) &= \frac{1}{1 - \frac{2MG}{r}} \end{aligned}$$

mentre per il determinante vale:

$$g = -r^4 \sin^2 \theta$$

ed il fatto che questo non dipenda dalle funzioni  $A(r)$  e  $B(r)$  è molto importante. L'elemento di distanza assume quindi la forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{2MG}{r}}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi)$$

Questa forma vale in linea di principio anche per corpi puntiformi. Notiamo però subito che la metrica ha delle singolarità in  $r = 0$  e  $r = 2MG \equiv r_g$ . Ripristinando le giuste dimensioni (introducendo le costanti  $c$ ), il cosiddetto raggio gravitazionale – o *raggio di Schwarzschild* – ha la forma:

$$r_g = \frac{2MG}{c^2}$$

e per averne un'idea possiamo considerare il valore che assume rispettivamente per il Sole, per la Terra e per il protone:

$$\begin{aligned} r_{\odot} &\approx 3 \text{ Km} \\ r_{\oplus} &\approx 0.9 \text{ cm} \\ r_p &\approx 10^{-50} \text{ cm} \end{aligned}$$

ovviamente nel caso del protone esso non ha alcun senso fisico in quanto, fra l'altro, è ben al di sotto della lunghezza di Planck.

Mentre la singolarità in  $r = 0$  può essere dovuta alle coordinate polari,<sup>3</sup> la singolarità in  $r_g$  assume importanza quando cade al di fuori del corpo,<sup>4</sup> cioè quando le dimensioni del corpo sono inferiori al suo raggio di Schwarzschild.

In questo caso  $r_g$  può assumere una semplice interpretazione fisica. Infatti ricordando che la velocità di fuga da un corpo è data da:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2GM}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2GM}{v^2}$$

<sup>2</sup>Quindi non va imposta in cosmologia, dove non avrebbe senso.

<sup>3</sup>Si ricordi infatti che lo jacobiano di questa trasformazione è singolare proprio in  $r = 0$ .

<sup>4</sup>Ricordiamo infatti che questa è la soluzione esterna al corpo.

risulta immediata l'interpretazione seguente: *il raggio di Schwarzschild corrisponde a quel particolare valore del raggio per il quale la velocità di fuga dal corpo eguaglia quella della luce*. Una rappresentazione grafica di questo può essere fatta in termini di coni di luce. Per far ciò consideriamo le geodetiche radiali, per le quali risulta  $d\theta = d\varphi = 0$ . Allora:

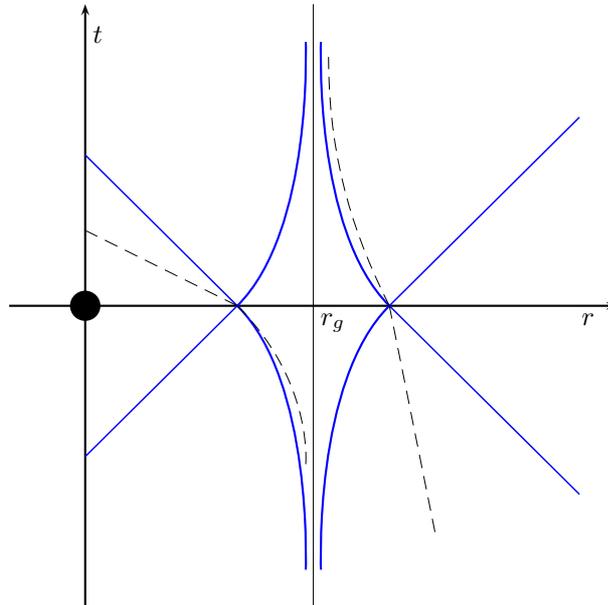
$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} dr^2 = 0$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \Rightarrow dt = \pm \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}$$

dove i due segni corrispondono alle due falde del cono di luce. Integrando:

$$t = r - \bar{r} + r_g \ln \left( \frac{r - r_g}{\bar{r} - r_g} \right) \quad \bar{r} \equiv r(0)$$

Nella figura è mostrato l'aspetto dei coni di luce nelle vicinanze della singolarità  $r = r_g$ .



Si noti che le falde del cono di luce in vicinanza della singolarità hanno come asintoto proprio  $r_g$ , cioè è come se la luce non potesse penetrare al di là di  $r_g$ . Si noti ancora che nella regione  $r < r_g$  risulta  $dr > 0$  e  $dt < 0$ . Poiché un ipotetico osservatore non può vedere la metrica che cambia segnatura perché gli autovalori della metrica – ed in particolare quindi il loro segno – sono conservati da una generica trasformazione di coordinate, questo osservatore vede in realtà *invertiti gli intervalli di tipo tempo e di tipo spazio*, cioè è portato ancora ad interpretare la quantità negativa come  $dr$ . Questo ha sulle linee di universo l'effetto mostrato in figura e significa che dall'interno non può uscire alcun segnale. Inoltre un corpo all'interno del raggio di Schwarzschild non può essere in equilibrio, in quanto raggiunge la singolarità  $r = 0$  in un tempo finito.

Consideriamo ora il tempo proprio di un osservatore che viaggiasse verso  $r_g$  insieme ad un fotone. Esso è dato da:

$$\int_{s_2}^{s_1} ds = \int_{\bar{r}}^r \sqrt{g_{00} \frac{dt^2}{dr^2} + g_{11}} dr$$

da cui:

$$s = s_0 + \int_{\bar{r}}^r \left( \sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{\bar{r}}} \right)^{-1} dr$$

che è un integrale ellittico che per  $r = r_g$  converge. Quindi un osservatore solidale con il fotone raggiungerebbe  $r_g$  in un tempo finito, mentre un osservatore esterno lo vedrebbe precipitare verso

$r_g$  in un tempo infinito, e ancora una volta dalla regione  $r < r_g$  nulla può sfuggire all'esterno. Una superficie con tale proprietà è detta *orizzonte degli eventi*.

Il modo per decidere se le singolarità siano di natura fisica o siano il risultato di qualche artificio matematico è quello di osservare direttamente le 20 componenti del tensore di Riemann ed osservare cosa accade agli invarianti di curvatura per  $r = 0$  e  $r = r_g$ . In questo caso, non è presente alcuna singolarità nel raggio di Schwarzschild, ma  $R_{0101} = r_g/r^3$  e quindi è singolare in  $r = 0$ . D'altra parte, il determinante  $g$  della metrica non è singolare per  $r = r_g$ , e questo è indice della non fisicità di tale singolarità.

È possibile quindi trovare un sistema di riferimento in cui tale singolarità non è presente. Uno di questi sistemi è il *sistema di Kruskal* ed è definito dalle trasformazioni:

$$\begin{cases} dt' = dt + \frac{f(r)dr}{1 - r_g/r} \\ dr' = dt + \frac{dr}{(1 - r_g/r)f(r)} \end{cases} \quad f(r) = \sqrt{\frac{r_g}{r}}$$

In realtà, la singolarità può essere rimossa da una qualunque trasformazione per cui risulti  $f(r_g) = 1$ . La particolare scelta di  $f(r)$  nel sistema di Kruskal permette in più di avere un nuovo sistema di coordinate sincro, cioè in cui  $g_{tt} = 1$ . Questa particolare trasformazione di coordinate conduce alla seguente forma per l'elemento di distanza:

$$ds^2 = dt'^2 - \frac{dr'^2}{\left[\frac{3}{4MG}(r' - t')\right]^{2/3}} - \frac{3}{2}(r' - t')^{4/3}(2MG)^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

ed ora vale  $r_g = 3(r' - t')/2$  e la singolarità è presente solo in  $r = 0$ . La coordinata  $r'$  è *ovunque spaziale* e la  $t'$  è *ovunque temporale* e le linee di universo hanno ora la forma  $r' - t' = \text{costante}$ . Le geodetiche radiali realizzano l'equazione:

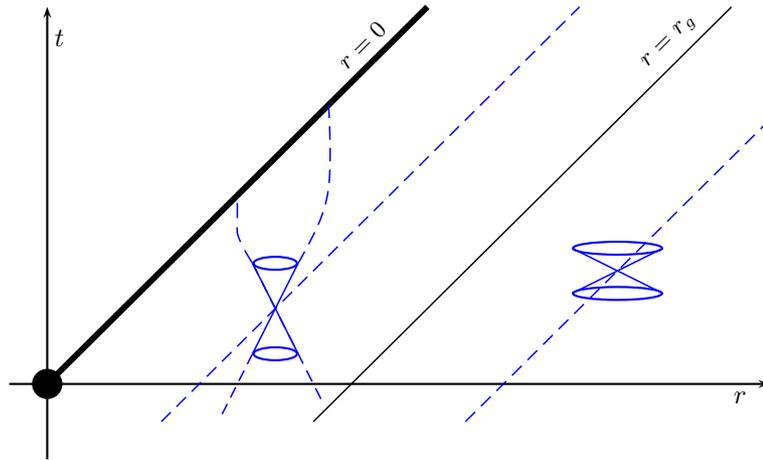
$$\frac{dr'}{dt'} = \pm \sqrt{\frac{r_g}{r'}} \quad (3.2)$$

ed in questo caso la singolarità è rappresentata da una retta inclinata. Risolvendo l'equazione per le geodetiche radiali si ottiene:

$$t' = \sqrt{r_g} \left( \sqrt{r'} - \sqrt{r_0} \right) \quad r_0 \equiv r(0)$$

Risulta evidente dalla (3.2) che per  $r > r_g$  risulta  $dt'/dr' < 1$ , in tal modo la retta  $r = \text{costante}$ , che rappresenta la linea di universo di un corpo in quiete, cade all'interno del cono. Se  $r < r_g$ , allora  $dt'/dr' > 1$ , quindi la linea di universo cade all'esterno delle falde del cono. Questo significa che nella regione  $r < r_g$  nessuna particella può essere immobile, come già detto, e qualunque segnale in questa zona si propaga verso il centro raggiungendolo in un tempo finito. Si vede infatti sempre dalla (3.2) che le frontiere del cono intersecano ad una distanza finita la retta  $r = 0$ , avvicinandosi ad essa verticalmente. È evidente che per  $r = r_g$  non c'è alcuna singolarità, pur rimanendo  $r_g$  un orizzonte degli eventi nel senso dato sopra.

La discussione è evidenziata nella figura seguente.



Consideriamo ora una metrica radiale che varia nel tempo, come nel caso di una sfera pulsante. Allora evidentemente  $A \equiv A(r, t)$ . In questo caso, nelle equazioni (3.1) compaiono di termini aggiuntivi che dipendono dalla derivata temporale di  $A(r, t)$  e compare un termine fuori diagonale:

$$R_{tr} = -\frac{\dot{A}(r, t)}{rA(r, t)} = 0$$

l'uguaglianza a zero del termine deriva dalle equazioni di Einstein, ed implica che la derivata temporale di  $A(r, t)$  sia nulla. Da questo si ricava che tutti i termini aggiuntivi della (3.1) sono nulli e pertanto *anche nel caso di spazio-tempo sfericamente simmetrico senza assunzione di staticità, la soluzione di Schwarzschild rimane la sola soluzione di questo sistema di equazioni più generale. Perciò tutti gli spazio-tempo sfericamente simmetrici con  $R_{\alpha\beta} = 0$  sono statici.* Questo risultato, noto come *teorema di Birkhoff*, è strettamente analogo al fatto che il potenziale coulombiano è la sola soluzione sfericamente simmetrica delle equazioni di Maxwell nel vuoto. Esso può essere interpretato dicendo che in gravità, come in elettromagnetismo, non esiste radiazione di monopolo e cioè sfericamente simmetrica.

## 3.2 La Soluzione Interna

Consideriamo ora la soluzione di Schwarzschild per la regione interna di un corpo isotropo. In tal caso le equazioni di campo sono:

$$R^{\alpha\beta} = 8\pi G \left( T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} T \right)$$

Il tensore di Ricci ha la stessa forma che nella regione esterna, in quanto le sue componenti sono state ricavate nelle sole ipotesi di simmetria sferica e staticità dell'oggetto, condizioni che continuano a sussistere. Nell'ipotesi di isotropia, il tensore Energia-Impulso ha la forma:

$$T^{\alpha\beta} = (p + \varrho)u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta}$$

ed il  $ds^2$  ha la stessa forma generale:

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Esplicitando le componenti del tensore energia-impulso:

$$u^i = 0 \quad u^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = -1$$

$$u^0 = 1/\sqrt{g_{00}} = 1/\sqrt{B(r)}$$

Le componenti delle equazioni di Einstein assumono allora la forma:

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{1}{2} \frac{B''(r)}{B(r)} - \frac{1}{4} \frac{B'(r)}{B(r)} \left[ \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right] - \frac{1}{r} \frac{A'(r)}{A(r)} = -4\pi G(\varrho - p)A(r) \\ R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{1}{2} \frac{r}{A(r)} \left[ \frac{B'(r)}{B(r)} - \frac{A'(r)}{A(r)} \right] + \frac{1}{A(r)} = -4\pi G(\varrho - p)r^2 \\ R_{tt} &= -\frac{1}{2} \frac{B''(r)}{A(r)} + \frac{1}{4} \frac{B'(r)}{A(r)} \left[ \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right] - \frac{1}{r} \frac{B'(r)}{A(r)} = -4\pi G(\varrho + 3p)B(r) \end{aligned}$$

le altre componenti essendo nulle.<sup>5</sup> Oltre alle relazioni scritte sopra, deve valere la conservazione del tensore Energia-Momento, e questo implica che:

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\beta} (\sqrt{g} T^{\alpha\beta}) + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} T^{\beta\gamma} = 0$$

e tenendo presente la forma del tensore  $T^{\alpha\beta}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} [\sqrt{g}(p + \varrho)u^{\alpha}u^{\beta}]_{;\beta} + \Gamma_{i\gamma}^{\alpha} (p + \varrho)u^i u^{\gamma} + p_{,i} g^{\alpha i} = 0$$

in equilibrio idrostatico vale  $u^i = 0$ ,  $u^0 = 1/\sqrt{g^{00}}$ , quindi:

$$g_{\alpha\beta,0} = p_{,00} = \varrho_{,0}$$

e gli unici termini che rimangono sono:

$$\Gamma_{00}^{\alpha} = \frac{1}{2} g_{00,i}^{\alpha i}$$

ottenendo la relazione:

$$-\frac{\partial p}{\partial x^{\alpha}} = (p + \varrho) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \lg \sqrt{g_{00}}$$

La comparsa di un termine di pressione avverte che in relatività generale anche questa è una sorgente di energia gravitazionale. A tale equazione deve essere necessariamente affiancata un'equazione di stato che introduce un legame fra  $p$  e  $\varrho$ .

Consideriamo il caso ultrarelativistico, in cui l'equazione di stato è  $p = \varrho/3$ . Allora separando le variabili nell'equazione precedente:

$$\int \frac{dp(\varrho)}{p(\varrho) + \varrho} = -\lg \sqrt{g_{00}} \quad \Rightarrow \quad \varrho = A g_{00}^{(-p+\varrho)/2p} = A g_{00}^{-2}$$

quindi  $p = \varrho/3$ ,  $\varrho \propto g_{00}^{-2}$ ; poichè fuori dal campo vale  $\varrho = 0$  la metrica ha una singolarità e tale singolarità compare sul bordo dell'oggetto massivo; questo chiaramente rende impossibile il raccordo della soluzione interna con quella esterna. Ne consegue che l'ipotesi di fluido ultrarelativistico non in equilibrio non è corretta.

Poiché è presente la simmetria sferica, si può scrivere:

$$-\frac{dp}{dr} = \frac{p + \varrho}{2} \frac{\partial}{\partial r} \lg B(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{B'(r)}{B(r)} = -\frac{2p'}{p + \varrho}$$

il complesso di equazioni scritto finora costituiscono 4 equazioni in 4 incognite:  $A(r)$ ,  $B(r)$ ,  $p(r)$  e  $\varrho(r)$ . In analogia alla soluzione esterna, notiamo che vale la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \frac{R_{rr}}{2A(r)} + \frac{R_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{R_{tt}}{2B(r)} &= \frac{A'(r)}{rA^2(r)} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 A(r)} = -8\pi G\varrho \Rightarrow \\ \left( \frac{r}{A(r)} \right)' &= 1 - 8\pi G\varrho r^2 \Rightarrow \boxed{A(R) = \left( 1 - \frac{2MG}{r} \right)^{-1}} \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Ovviamente, a causa della simmetria sferica sussiste ancora la relazione:

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}$$

con la posizione:

$$M = 4\pi G \int_0^r \varrho(r') dr'$$

Sostituiamo ora la relazione su  $B'(r)/B(r)$  e la precedente forma per  $A(r)$  nella equazione di  $T_{\theta\theta}$ :

$$-1 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(1 - \frac{rp'}{p+r}\right) + \frac{GM}{r} - 4\pi Gr^2 \varrho = -4\pi G(\varrho - p)r^2$$

da tale relazione si ricava la derivata della pressione  $p$ :

$$\boxed{-\frac{dp}{dr} = G \frac{M(r)}{r^2} \varrho(r) \left[1 + \frac{p(r)}{\varrho(r)}\right] \left[1 + \frac{4\pi^3 \varrho(r)}{M(r)}\right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{r}\right]^{-1}}$$

e questa è l'analogia della vecchia relazione dell'equilibrio statico:<sup>6</sup>

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM\varrho}{r^2}$$

con in più dei termini correttivi rispetto al coefficiente 1. Si può dimostrare che questi termini sono del tipo:

$$\left(1 \mp \frac{rg}{r}\right)$$

Sostituendo ora  $p'$  nell'equazione dell'equilibrio statico si trova:

$$\frac{B'(r)}{B(r)} = \frac{2G}{r} [M(r) + 4\pi r^3 p] \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{B(r) = \exp \left\{ - \int \frac{2G}{r} [M(r) + 4\pi r^3 p] \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr \right\}}$$

Quest'ultima equazione<sup>7</sup> insieme alle altre equazioni riquadrate ed insieme all'equazione di stato risolve completamente il problema della soluzione di Schwarzschild.

<sup>6</sup>Tale equazione deriva dall'eguagliare le due forze agenti su di un guscio infinitesimo di un oggetto sferico. Una è la forza gravitazionale che tende a far collassare il corpo data da  $F = GM\varrho dV/r^2 = GM\varrho S dV dr/r^2$ , l'altra è la forza dovuta alla pressione interna che tende ad espandere il corpo data da  $F = -p ds$ .

<sup>7</sup>Ovvero, in forma forse meno leggibile, ma più esplicita:

$$B(r) = e^{-\int \frac{2G}{r} [M(r) + 4\pi r^3 p] \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr}$$

# Capitolo 4

## Applicazioni Cosmologiche

### 4.1 Introduzione alla Cosmologia

Si suppone come primo approccio – e l'unico sviluppato nel seguito – che valga un modello invariante per rotazione e traslazione.

Il risultato di questa soluzione cosmologica, nonostante la notevole semplificazione, fornisce una descrizione valida dell'universo verificata entro  $5 \times 10^{-6}$  (nel senso che sarà chiaro fra poco). Tuttavia, la richiesta di condizioni iniziali estremamente specifiche implicite nel modello utilizzato è tuttora un problema aperto. Le condizioni di omogeneità e isotropia costituiscono il cosiddetto *Principio Cosmologico*.

Isotropia significa che in qualunque punto dell'universo gli oggetti si comportano nello stesso modo.<sup>1</sup> Ricordando la legge di Hubble,  $v_r = H_0 d$ , l'isotropia implica che fissata una data distanza  $d$  la costante di Hubble  $H_0$  è costante.<sup>2</sup> Una stima attuale del suo valore è:

$$H_0 = 50 \pm 5 \text{ Km/s} \cdot \text{Mpc} \quad 1 \text{ pc} = 3.26 \text{ anni luce}$$

e quindi entro il 10% è una costante *spaziale*, ma non necessariamente *temporale*.

L'omogeneità va intesa come densità media degli ammassi di galassie in tutto l'universo.<sup>3</sup> In realtà l'immagine della radiazione cosmica di fondo è molto più omogenea, ed è l'impronta dell'epoca in cui si forma l'idrogeno atomico a partire dal gas di  $\gamma$ ,  $p$  e  $e^-$  (circa 300 000 anni da  $t = 0$ , ad una temperatura di  $T = 6000^\circ K$ ). Essa è praticamente l'oggetto più lontano, e quindi più antico, visibile. La disomogeneità della radiazione ( $\Delta T/T \cong 5 \times 10^{-6}$ ) è il riflesso della disomogeneità iniziale nella distribuzione dell'idrogeno, la quale si riflette sulla radicale disomogeneità della materia.

Un problema connesso è quello della misura della distanza, in quanto sono note con sicurezza solo le distanze di  $\approx 100$  stelle vicine, per le quali è possibile misurarne la parallasse geometrica. Un modo alternativo di misura delle distanze è quello della parallasse spettroscopica (dal diagramma HR), ricavata confrontando magnitudine assoluta ed apparente. A tal fine si considerano stelle di sequenza principale – identificabili dal loro spettro – di distanza nota e si costruisce il relativo diagramma HR. Quindi si trova la magnitudine assoluta  $M$  e da quella apparente  $m$  si costruisce il modulo di distanza  $L = M - m$ . Quindi, qualora sia nota la temperatura  $T$  e sapendo che la stella è in sequenza

<sup>1</sup>Se però questi oggetti non sono troppo vicini.

<sup>2</sup>Nel senso che una volta fissato  $d$ ,  $H_0$  è indipendente dalla direzione.

<sup>3</sup>Quando si considera la struttura su larga scala dell'universo, le unità fondamentali sono le galassie, che sono agglomerati di stelle. Le galassie stesse tendono a raggrupparsi sotto l'influenza della gravità in cluster. Ci sono evidenze di cluster di cluster, ma è meno chiara la presenza di cluster di cluster di cluster o gerarchie superiori. Le osservazioni indicano che la densità media delle galassie è costante, nel senso che se ad un dato tempo si considera una porzione media di universo, grande in rapporto alle distanze medie fra le galassie, allora il numero di galassie è circa lo stesso di una qualunque altra porzione di universo. Questo si verifica in ogni direzione rispetto a noi: se si suppone quindi che noi non occupiamo un posto speciale nell'universo, questo ci permette di dedurre l'omogeneità e l'isotropia.

principale, si trova  $M$  e, sfruttando la seguente formula, la distanza:

$$l = \frac{L}{4\pi d^2} \Rightarrow m = M - \lg d$$

Per oggetti più lontani (galassie) si possono sfruttare stelle variabili. Per tali stelle, il periodo è legato alla luminosità assoluta. Con telescopi a terra si è riusciti a stabilire con precisione, grazie a questo metodo, la distanza di galassie fino a 10 milioni di anni luce. Per misure a distanze più grandi si può misurare la velocità di rotazione di una galassia, che è legata alla sua grandezza dalla relazione di Tully-Fischer.<sup>4</sup> Esso sembra un metodo preciso e con esso si è riuscito a stimare distanze fino a 300 milioni di anni luce.

L'ultimo metodo possibile per la misura di distanza è rappresentato da un tipo di supernova denominato  $Ia$ . Si ritiene che al massimo della luminosità tutte queste stelle producano circa la stessa quantità di luce, rendendo quindi possibile determinarne la distanza. Per l'enorme quantità di radiazione emessa esse dovrebbero essere osservabili fino a 5 miliardi di anni luce. Tuttavia bisogna affermare che a tutt'oggi la calibrazione di questa scala di distanza si basa su una sola misura.<sup>5</sup>

## 4.2 La Soluzione Cosmologica di Friedmann

Sulla base del principio cosmologico si troverà ora in modo intuitivo una metrica che soddisfi le richieste di omogeneità e isotropia.

Il principio cosmologico afferma ragionevolmente che l'universo appare lo stesso da qualunque punto lo si guardi e indipendentemente dalla direzione in cui si guarda, ad un tempo particolare. Occorre quindi preliminarmente definire il concetto di "tempo particolare".

Per fare ciò si consideri una serie di ipersuperfici spaziali, cioè superfici di tipo spazio in cui due punti qualsiasi possono essere connessi da una curva giacente interamente sulla superficie stessa. Ipotizziamo che ogni galassia si trovi su una di queste ipersuperfici in modo che la superficie di simultaneità del sistema locale di Lorentz di ogni galassia giaccia sulla ipersuperficie. L'intera ipersuperficie è ricopribile quindi con queste superfici di simultaneità (in un sistema lorentziano è possibile sincronizzare gli orologi), quindi la quadrirelatività risulta ortogonale alla ipersuperficie. La serie di ipersuperfici così ottenute può essere etichettata con un parametro  $t$ , che è preso come tempo proprio della galassia. Esso definisce un tempo universale sulla ipersuperficie, cosicché dare un "tempo particolare" significa fissare una particolare ipersuperficie e dunque  $t$  può essere scelto per misurare il tempo lungo una geodetica.<sup>6</sup> L'introduzione di coordinate spaziali  $(x^1, x^2, x^3)$  costanti lungo ogni geodetica permette di definire un sistema di riferimento in cui le galassie sono ferme. Questo sistema prende il nome di *coordinate comoventi*. In questo caso:

$$ds^2 = f(t)dt^2 - h_{ij}dx^i dx^j \quad h_{ij} \equiv h_{ij}(t, x^1, x^2, x^3)$$

con la trasformazione:

$$t \rightarrow t' = \int \sqrt{f(t)} dt \Rightarrow ds^2 = dt'^2 - h_{ij}dx^i dx^j$$

Sia  $x^\mu(t)$  la linea di universo di una galassia, con  $\tau$  tempo proprio della galassia. Se  $x^0 = c\tau$ ,  $x^i =$  costante  $\Rightarrow ds = c \cdot d\tau = c \cdot dt \rightarrow \tau = t$ . Cioè il parametro  $t$  coincide effettivamente con il tempo proprio.

La metrica così ricavata non comprende ancora l'ipotesi di omogeneità e isotropia.

La separazione spaziale di due galassie vicine, a  $t$  costante e indicando le coordinate rispettivamente con  $x^i$  e  $x^i + \Delta x^i$ , è data da:

$$dl = h_{ij} \Delta x^i \Delta x^j$$

<sup>4</sup>Qualitativamente, l'argomento è il seguente: le galassie molto luminose hanno di norma massa maggiore di quelle meno brillanti e quindi ruotano più lentamente.

<sup>5</sup>Al tempo del corso cui si riferiscono questi appunti, ovvero nel 1993.

<sup>6</sup>Il principio cosmologico implica fra l'altro che  $\varrho \equiv \varrho(t)$ ,  $T \equiv T(t)$ . Cioè esistono grandezze scalari che possono essere utilizzate per scindere l'universo in fogli (fogliettatura) ortogonali all'asse del tempo, proprio in quanto dipendenti solo dal tempo. Queste grandezze possono essere utilizzate allo stesso modo del tempo  $t$  per descrivere l'evoluzione dell'universo.

Si consideri il triangolo formato da tre galassie e lo stesso triangolo dopo un certo tempo. Per l'omogeneità e l'isotropia i due triangoli devono essere simili, ed il fattore di scala deve essere lo stesso indipendentemente dalla posizione delle galassie nello spazio. Perciò  $h_{ij}$  coinvolge il tempo con un fattore comune, in modo che il rapporto delle distanze sia costante:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j$$

con il trispazio dato da:

$$dl^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j$$

Per un teorema di geometria differenziale, tale spazio risulta a curvatura costante ed il tensore di Riemann dipende solo dalla metrica e da un tensore costante. Il tensore di rango 4 tridimensionale, costruito dalla metrica tridimensionale, ha le proprietà del tensore di Riemann se:

$$R_{ijkl} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk})$$

Il tensore tridimensionale dato da  $dl^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j$  ha la forma precedente se  $\gamma_{ik}$  è scelto in modo da dare:

$$dl^2 = \left(1 + \frac{1}{4}kr'^2\right)^{-2} [dx'^2 + dy'^2 + dz'^2] \quad r'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{\left[1 + \frac{1}{4}k(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)\right]}$$

e che in coordinate polari assume la forma:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{\left(1 + \frac{1}{4}k(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)\right)^2} \right]$$

e con la trasformazione:

$$r = \frac{r'}{\left(1 + \frac{1}{4}kr'^2\right)}$$

si ha finalmente la *metrica di Robertson-Walker-Friedmann* nella forma standard:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right)$$

La metrica di Robertson-Walker si può trovare più formalmente imponendo sulla metrica l'esistenza di isometrie infinitesime che trasportano un punto in un punto vicino. Per comprendere il concetto si consideri il seguente esempio:

$$ds^2 = A(t)dt^2 + B(t)dx^2 + C(t)dy^2 + D(t)dz^2$$

e siano due punti  $P = (a, b, c)$  e  $P' = (a', b', c')$ . La trasformazione definita da:

$$x' = x + a - a' \quad y' = y + b - b' \quad z' = z + c - c'$$

porta il punto  $P$  in  $P'$ , infatti  $(x, y, z) = (a, b, c) \rightarrow (x', y', z') = (a', b', c')$ . D'altra parte la metrica è invariata:

$$ds^2 = A(t)dt^2 + B(t)dx'^2 + C(t)dy'^2 + D(t)dz'^2$$

quindi la trasformazione precedente definisce una simmetria globale: essa rappresenta uno spazio omogeneo. In maniera analoga si procede per uno spazio isotropo: uno spazio si definisce isotropo se in un punto generico  $X$  esiste una isometria che lascia invariato  $X$  ma ne varia la direzione in ogni modo possibile, cioè trasforma un vettore applicato in  $X$  in un qualunque altro vettore ancora applicato in  $X$ .

Per dire qualcosa in più su questo aspetto definiamo i *vettori di Killing* e studiamo le proprietà che conferiscono a determinati tipi di spazio.

Si consideri la trasformazione di coordinate infinitesima:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu$$

in generale vale la relazione  $g_{\alpha\beta}(x) = g'_{\alpha\beta}(x')$ . Imponiamo ora che la metrica sia invariante per trasformazioni infinitesime delle coordinate: allora i vettori  $\xi$  devono soddisfare la seguente equazione:

$$\boxed{\xi_{\rho;\alpha} + \xi_{\alpha;\rho} = 0} \quad \text{Equazioni di Killing}$$

si dice che questi vettori (detti appunto vettori di Killing) generano una isometria nella metrica. Il fatto che la metrica abbia delle isometrie infinitesime implica che la metrica abbia anche certe simmetrie. Inoltre, poiché l'equazione di Killing è un'equazione tensoriale, se la metrica ha un'isometria essa possiederà una corrispondente simmetria in ogni sistema di coordinate trasformato.

Consideriamo ora le relazioni:

$$\begin{aligned} \xi_{\sigma;\rho;\mu} - \xi_{\sigma;\mu;\rho} &= -R_{\sigma\mu\rho}^\lambda \xi_\lambda \\ R_{\sigma\mu\rho}^\lambda + R_{\mu\rho\sigma}^\lambda + R_{\rho\sigma\mu}^\lambda &= 0 \end{aligned}$$

permutando ciclicamente gli indici nella prima, sommando e tenendo conto della seconda:

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu} - \xi_{\sigma;\mu;\rho} + \xi_{\mu;\sigma;\rho} - \xi_{\mu;\rho;\sigma} + \xi_{\rho;\mu;\sigma} - \xi_{\rho;\sigma;\mu} = 0$$

ed inserendo in questa l'equazione di Killing derivata in  $\mu$  si ricava finalmente:

$$\boxed{\xi_{\mu;\rho;\sigma} = -R_{\sigma\mu\rho}^\lambda \xi_\lambda}$$

che collega un vettore di Killing con la sua derivata seconda tramite il tensore metrico. Ciò significa che si può definire un vettore tramite un'espansione di Taylor in cui compaiono solo due coefficienti:

$$\xi_\rho = A_\rho^\lambda \xi_\lambda + B_\rho^{\lambda\nu} \xi_{\lambda;\nu}$$

e questo è effettivamente lo sviluppo completo, in quanto l'equazione appena ricavata permette di sostituire la derivata  $n$ -sima con la  $(n-2)$ -sima e così via per ricorrenza. In uno spazio a  $n$  dimensioni il numero dei coefficienti  $A$  e  $B$  è dato rispettivamente  $n$  e  $n(n-1)/2$ . Il numero di vettori di Killing indipendenti è dato dalla somma dei due, pertanto  $n(n+1)/2$ . Uno spazio che ammetta il numero massimo possibile di vettori di Killing è detto *spazio massimamente simmetrico* o *spazio a simmetria massima*. Si può dimostrare che in tali spazi la curvatura scalare è costante e quindi può risultare solo  $R \leq 0$ : cioè questi spazi possono essere solo di tre tipi. In questo tipo di spazi, risulta anche  $R_{\alpha\beta} \propto g_{\alpha\beta}$ .

Gli spazi importanti dal punto di vista cosmologico sono quelli che hanno sottospazi a simmetria massima. Nel caso di uno spazio con  $n = 4$ , un sottospazio  $n = 3$  a simmetria massima rende in effetti l'idea di una sfera che si espande nel tempo. In queste condizioni il quadrintervallo si può scrivere come:

$$ds^2 = f(t)dt^2 + R(t)\hat{g}_{ij}dx^i dx^j$$

dove  $\hat{g}_{ij}$  è la metrica del sottospazio a simmetria massima. Grazie al principio cosmologico, è il caso dell'universo visibile: la parte spaziale di esso è dunque a curvatura costante in questo modello (ed è quindi diretta conseguenza della omogeneità e della isotropia).

La metrica spaziale si può in questo caso scrivere con una forma unica per i tre segni della curvatura (costante):

$$dl^2 = R^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta + r^2 \sin^2 d\varphi \right)$$

con  $k = 1$ ,  $k = 0$ ,  $k = -1$  se rispettivamente lo spazio (nel senso di: ipersuperficie spaziale) è sferico, piatto o iperbolico. In uno spazio di questo tipo  $dr$  è in pratica una coordinata angolare in quanto la distanza radiale di due punti nel sottospazio spaziale è data da  $dl = Rdr$ . La metrica ha pertanto la forma completa:

$$ds^2 = g(t)dt^2 - R(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta + r^2 \sin^2 d\varphi \right)$$

e ridefinendo la coordinata temporale come:

$$t \rightarrow t' = \int \sqrt{g(t)} dt$$

si ritrova la metrica di Robertson-Walker nella forma standard:

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\varphi \right)$$

Poiché per la distanza fra due punti  $\overline{ab}$  vale (come già sottolineato prima):

$$d_{\overline{ab}} = \alpha R \Rightarrow \dot{d}_{\overline{ab}} \equiv v_{\overline{ab}} = \alpha \dot{R} = \frac{d_{\overline{ab}}}{R} \dot{R} = d_{\overline{ab}} \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} \equiv d_{\overline{ab}} \frac{\dot{R}_0}{R_0}$$

e questa è esattamente la legge di Hubble se sussiste la relazione:

$$H_0 = \frac{\dot{R}_0}{R_0}$$

dalla quale si vede, fra l'altro, che la costante di Hubble non è in effetti una costante temporale.

Riconsideriamo ora le equazioni di Einstein:

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta} = k (T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T) \\ T^{\alpha\beta} = (p + \varrho) u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta} \end{cases}$$

per il sistema di coordinate scelto, l'unica componente diversa da zero della quadrivelocità è la componente temporale (ipotesi di fluido perfetto stazionario). La richiesta che il tensore Energia-Impulso sia a derivata covariante nulla impone che sia:

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\beta (\sqrt{g} T^{\alpha\beta}) + \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha T^{\lambda\beta} \Rightarrow R^3 \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} [R^3 (p + \varrho)]$$

e per il principio cosmologico sono funzioni solo del tempo. Questo vale anche per  $R$ , quindi si può cambiare variabile di derivazione con  $d/dt \rightarrow \dot{R}d/dR$ . Si ottiene allora:

$$\frac{d}{dR} (\varrho R^3) = -3pR^3 \quad \text{I}^a \text{ Equazione di Friedmann}$$

La pressione che compare nell'equazione precedente è intesa essenzialmente come pressione di radiazione e nel caso dell'era di materia si dà  $p = 0$ . Le equazioni di Einstein forniscono invece, separando la parte temporale da quella spaziale e tenendo presente che il tensore di Ricci è proporzionale alla metrica:

$$\begin{cases} 3\ddot{R} = -4\pi G(\varrho + 3p)R & \text{parte temporale} \\ R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k = 4\pi G(\varrho - p)R^2 & \text{parte spaziale} \end{cases}$$

eliminando la  $\ddot{R}$  dalle precedenti si trova:

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \varrho R^2 \quad \text{II}^a \text{ Equazione di Friedmann}$$

Le due equazioni di Friedmann costituiscono un sistema di due equazioni in tre incognite ( $R$ ,  $\varrho$ ,  $p$ ), quindi va imposta una condizione ulteriore per risolvere univocamente il sistema. Questa può essere una relazione fra  $R$  e  $\varrho$  o meglio ancora una relazione fra  $p$  e  $\varrho$  (equazione di stato). Si può supporre che ad un certo istante, abbastanza primitivo, si sia verificata la relazione ultrarelativistica

$p = \varrho/3$ , mentre oggi è verificata una relazione di tipo  $p = 0$  ( $p \ll \varrho$ ). Consideriamo il caso di  $p = 0$ , la prima equazione di Friedmann diviene allora:

$$\varrho R^3 = \text{costante} = \varrho_0 R_0^3 \Rightarrow \varrho = \varrho_0 \frac{R_0^3}{R^3}$$

e questa relazione vale evidentemente per il periodo attuale. Nella ipotesi di  $p = \varrho/3$  si trova, ancora dalla prima equazione di Friedmann:

$$3R^2 \varrho + \frac{d\varrho}{dR} R^3 = -\varrho R^2 \Rightarrow \frac{d}{dR}(\varrho R^4) = 0 \Rightarrow \varrho = \varrho_0 \frac{R_0^4}{R^4}$$

Nella regione intermedia non si può scrivere una relazione in modo semplice. Un andamento proposto che raccorda le due soluzioni è il seguente:

$$\varrho = A \frac{\sqrt{R^2 + B}}{R^4}$$

Notiamo che nella parte temporale delle equazioni di Einstein si deduce che la derivata seconda del fattore di scala<sup>7</sup> è negativa, dunque rivolge la concavità verso l'asse temporale e deve intercettarlo in un punto. In altre parole, esiste un tempo  $t'$  in cui  $R = 0$ . Per convenzione si sceglie l'origine temporale in modo che quando  $t = 0$ ,  $R = 0$ . Questa è l'origine temporale dell'universo di Friedmann.

Riconsideriamo ora il quadrintervallo:

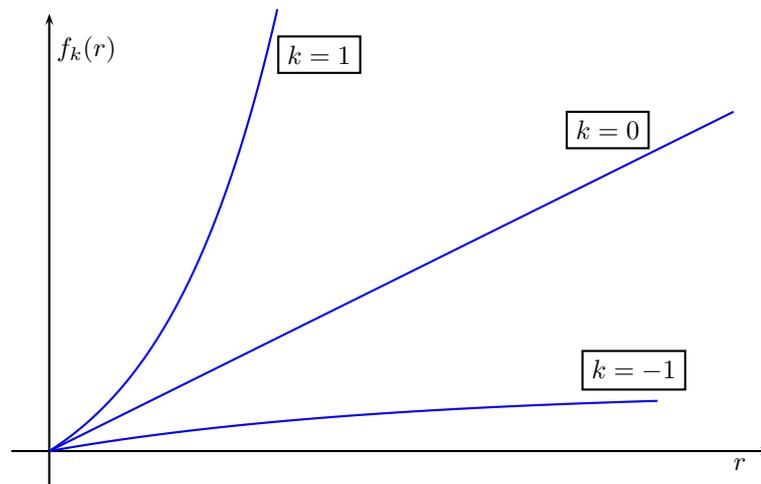
$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\varphi \right)$$

Le geodetiche radiali sono definite dall'equazione (a meno di un segno  $\pm$ ):

$$dt = \frac{R(t) dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \Rightarrow \frac{dt}{dR(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

e integrando l'espressione precedente fra due istanti  $t_0$  e  $t_1$ , istante generico in cui è partito un segnale luminoso, si trova:

$$f_k(r_1) = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} \arcsin r_1 & k = 1 \\ r_1 & k = 0 \\ \text{settsinh } r_1 & k = -1 \end{cases}$$



<sup>7</sup>In questo modo viene anche chiamata la curvatura scalare  $R$ , in quanto siccome dipende solo dal tempo si comporta appunto come un fattore di scala.

Se si considera ora l'integrale fra  $t_0 + \Delta t_0$  e  $t_1 + \Delta t_1$ , esso deve essere uguale al precedente integrale fra 0 e  $r_1$ , pertanto si ricava facilmente:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} = \frac{R(t_1)}{R_0} = \frac{v_0}{v_1}$$

Definendo:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}$$

con  $\lambda_1$  lunghezza d'onda calcolata nel laboratorio e  $\lambda_0$  lunghezza d'onda alla sorgente<sup>8</sup>, segue subito:

$$z = \frac{R_0}{R(t_1)} - 1$$

e nel caso di  $z > 0$  si parla di *Red-Shift*, se invece  $z < 0$  si parla di *Blue-Shift*.

Nelle nostre immediate vicinanze si può espandere il fattore di scala in serie intorno a  $t_0$ :

$$R(t) = R_0 \left[ 1 + \frac{\dot{R}}{R_0}(t - t_0) + \frac{\ddot{R}}{2R_0}(t - t_0)^2 + \dots \right]$$

e ricordando la definizione di  $H_0$  e definendo il *parametro di decelerazione*  $q_0 = -(\ddot{R}_0 R_0)/2\dot{R}_0^2$ , questa relazione si può riscrivere come:

$$R(t) = R_0 [1 + H_0(t - t_0) - q_0 H_0(t - t_0)^2] + O(3)$$

ed inserendo questa espansione nella definizione di Red-Shift e avendo un legame fra la distanza di due punti e  $R(t)$ , il Red-shift si può riscrivere in funzione della distanza. L'importanza di questo risiede evidentemente nel fatto che in questo modo è possibile fare una misura di distanza tramite una misura di Red-Shift.

Consideriamo ora la II<sup>a</sup> equazione di Friedmann:<sup>9</sup>

$$H_0^2 + \frac{k}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3}\varrho \quad \Rightarrow \quad \varrho = \varrho_c + \frac{3k}{8\pi G R_0^2} \quad \varrho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

dove si evince subito che  $\varrho_c$  è la densità che dovrebbe avere l'universo se la sua parte spaziale fosse piatta ( $k = 0$ ). Numericamente, questo valore vale  $\varrho_c \approx 10^{-29} \text{ g/cm}^3$ , mentre da osservazioni sperimentali sembra che  $\varrho_0 \approx 10^{-31} \text{ g/cm}^3$ .

Segue immediatamente che definito il parametro  $\Omega \equiv \varrho/\varrho_c$ :

$$\begin{cases} \Omega > 1 & (\varrho > \varrho_c) & \Rightarrow & k = 1 \\ \Omega = 1 & (\varrho = \varrho_c) & \Rightarrow & k = 0 \\ \Omega < 1 & (\varrho < \varrho_c) & \Rightarrow & k = -1 \end{cases}$$

Dalla equazione di Einstein per la parte spaziale e temporale si ricavano rispettivamente le relazioni:

$$\frac{k}{R_0^2} = (2q_0 - 1)H_0^2$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_c} = 2q_0$$

queste implicano delle condizioni su  $q_0$ :

$$\begin{cases} k = 1 & \Rightarrow & q_0 > \frac{1}{2} \\ k = 0 & \Rightarrow & q_0 = \frac{1}{2} \\ k = -1 & \Rightarrow & q_0 < \frac{1}{2} \end{cases}$$

<sup>8</sup>Poiché  $R(t_1)$  si riferisce all'istante attuale  $t_1$  quando si effettua la misura nel laboratorio.

<sup>9</sup>Evidentemente, si è diviso entrambi i membri dell'equazione per  $R_0^2$ .

Attualmente<sup>10</sup> si stima  $q_0 = 0.9 \pm 0.4$ , dunque sembra privilegiato il valore  $q_0 > 1/2$ , che è in disaccordo con la stima fatta a partire dalla densità. Questo è uno dei problemi aperti della cosmologia e uno dei motivi alla base della ricerca della cosiddetta “materia oscura”.

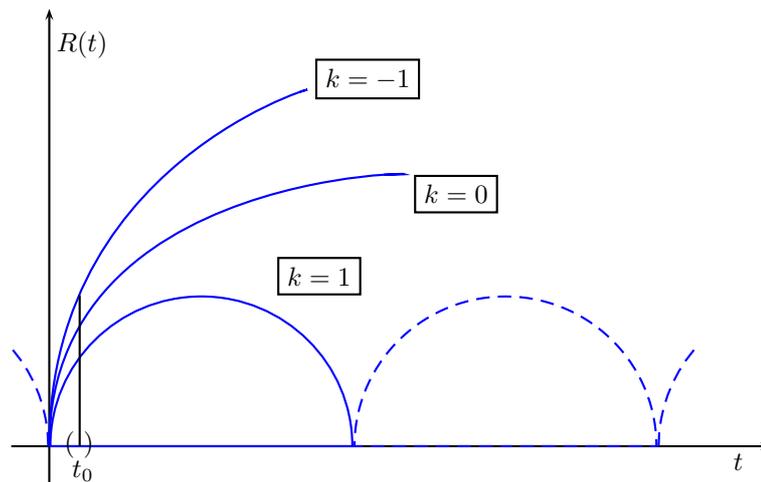
Riconsideriamo ora la seconda equazione di Friedmann, integriamola al momento attuale, con  $\rho \propto R^{-3}$  (per inciso, questo integrale dà l'età dell'universo):

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \frac{A}{R} \Rightarrow \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H_0 \left[1 - 2q_0 + 2q_0 \frac{R_0}{R(t)}\right] \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{R/R_0} \left(1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right)^{-1/2} dx$$

dove  $x \equiv R/R_0$ . Questo è un integrale ellittico, e nel caso di  $k = 1$  si risolve con la sostituzione  $t = A(\alpha - \sin \alpha)$ ,  $R = B(1 - \cos \alpha)$ ;<sup>11</sup> mentre nel caso  $k = -1$  si risolve con la sostituzione  $t = A(\sinh \alpha - \alpha)$ ,  $R = B(1 - \cosh \alpha)$ . Importante è la forma delle soluzioni.

Se  $k = 1$ ,  $R(t)$  rappresenta una cicloide. È importante tuttavia evidenziare che il nostro universo giace su un ramo solo di questa curva, e precisamente sul ramo che parte dall'origine. Qualunque estensione dell'universo agli altri rami è vietata dalla singolarità con cui terminano tutti i rami: questo pertanto *non è un universo ciclico*. Per  $k = 0$  la soluzione è tale che  $R(t) \rightarrow t^{-2/3}$  per  $t \rightarrow \infty$ , mentre per  $k = -1$  è tale che  $R(t) \rightarrow t$  per  $t \rightarrow \infty$ . Queste soluzioni sono valide in un intorno di  $t_0$ , e sono illustrate nella figura seguente.



Per ricavare l'andamento nel periodo di tempo precedente bisogna utilizzare la relazione  $\rho \propto R^{-4}$ , e poiché per  $R \rightarrow 0$  le tre curve si confondono, si può prendere la  $k = 0$ , che è la più facile da integrare, ricavando:

$$R(t) \propto t^{1/2}$$

Tale relazione vale in realtà fino al limite in cui è lecito utilizzare una teoria classica. Essa funziona pertanto fino a valori di densità  $\rho \approx 10^{-13} \text{ g/cm}^3$ , oltre se ne può estendere la validità se si tengono in conto interazioni nucleari e quantistiche.

Se si stima l'età dell'universo dalle funzioni precedenti, si trova un valore  $t \geq 10^{10}$  anni, che si inquadra bene nella descrizione attuale dell'universo.

Notiamo che la metrica di Robertson-Walker è *conformemente piatta*, cioè esiste una trasformazione conforme che la riduce in metrica piatta. Questo è possibile perché il tensore di curvatura è determinato solo dallo scalare e dalla metrica con la parte spaziale a simmetria massima.

<sup>10</sup>Al tempo del corso cui si riferiscono questi appunti, ovvero nel 1993.

<sup>11</sup>Si noti che queste sono le equazioni di una cicloide con  $2B = R_{max}$ !

Si consideri ora una superficie sferica di raggio  $R$ . Consideriamo un cerchio di raggio  $r$  (“sfera”) su questa sfera più grande. Il concetto che si vuole illustrare è che la “sfera” di raggio  $r$  (che è un’ipersuperficie 3-dimensionale) rappresenta l’universo spaziale nello spazio – curvo – quadri-dimensionale che si espande, rappresentato dalla sfera di raggio  $R$ . Consideriamo la circonferenza e l’area di questo cerchio:

$$l = 2\pi R \sin \frac{r}{R}$$

$$A(r) = 2\pi R^2 \left(1 - \cos \frac{r}{R}\right)$$

il loro valore è pertanto differente da quello che si avrebbe in metrica piatta. Se in particolare  $R = r$  allora  $A(r) \cong 0.92\pi R^2$  è dell’8% minore. Questo significa che nelle nostre vicinanze “temporali” la discrepanza fra l’area di un cerchio in geometria sferica e in geometria piana è di circa 8%. Per il volume occorre integrare l’elemento di volume considerando la parte spaziale della metrica di Robertson-Walker, ottenendo:

$$V = \begin{cases} \frac{4\pi R^3 r^3}{3} \left[ \frac{3 \arcsin r}{2 r^3} - \frac{3 \sqrt{1-r^2}}{2 r^2} \right] & k = 1 \\ \frac{4\pi R^3 r^3}{3} & k = 0 \\ \frac{4\pi R^3 r^3}{3} \left[ \frac{3 \sqrt{1-r^2}}{2 r^2} - \frac{3 \operatorname{settsinh} r}{2 r^3} \right] & k = -1 \end{cases}$$

### 4.3 Calcolo del Tensore di Curvatura nella Soluzione di Friedmann

Troveremo ora esplicitamente le componenti del tensore di curvatura nel caso della soluzione cosmologica di Friedmann, sia per l’intrinseca utilità della stessa, per mostrare la complessità e il tipo di calcoli implicati.

Concettualmente si tratta di trovare le componenti del tensore metrico, da queste ricavare le componenti della connessione tramite la (1.6) e da queste calcolare le componenti del tensore tramite la (2.3).

Iniziamo con il considerare la forma della metrica:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi \right)$$

Tenendo presente che l’indice  $\mu = 0, 1, 2, 3$  e che le variabili corrispondenti alle componenti sono  $t, r, \theta, \varphi$ , le componenti del tensore metrico sono:

$$g_{00} = 1 \quad g_{11} = -\frac{R^2(t)}{1-kr^2} \quad g_{22} = -R^2(t)r^2 \quad g_{33} = -R^2(t)r^2 \sin^2 \theta$$

$$g^{00} = 1 \quad g^{11} = -\frac{1-kr^2}{R^2(t)} \quad g^{22} = -\frac{1}{R^2(t)r^2} \quad g^{33} = -\frac{1}{R^2(t)r^2 \sin^2 \theta}$$

Le derivate del tensore  $g_{\mu\nu,\lambda}$  sono date da:

$$\left\{ g_{00,\lambda} = 0 \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{11,0} = -\frac{2R\dot{R}}{1-kr^2} \\ g_{11,1} = -\frac{2kr\dot{R}R^2}{(1-kr^2)^2} \\ g_{11,2} = 0 \\ g_{11,3} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{22,0} = -2R\dot{R}r^2 \\ g_{22,1} = -2rR^2 \\ g_{22,2} = 0 \\ g_{22,3} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{33,0} = -2R\dot{R}r^2 \sin^2 \theta \\ g_{33,1} = -2rR^2 \sin^2 \theta \\ g_{33,2} = -2r^2 R^2 \sin \theta \cos \theta \\ g_{33,3} = 0 \end{array} \right.$$

Ricordiamo ora che la connessione è legata alla metrica dalla relazione (1.6):

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma})$$

Iniziamo col calcolare i termini con la componente controvariante temporale ( $\mu = 0$ ):

$$\begin{aligned}\Gamma_{\nu\lambda}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\sigma} (g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}) = \\ &= \frac{1}{2}g^{00} (g_{0\nu,\lambda} + g_{0\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,0}) = \\ &= -\frac{1}{2}g^{00} g_{\nu\lambda,0} = -\frac{1}{2}g^{00} g_{ii,0}\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che il tensore metrico è diagonale (e quindi i termini  $g_{\mu\nu}$ ,  $\mu \neq \nu$  sono nulli) e che le derivate rispetto alla componente  $\mu = 0$  sono nulle. Restano dunque solo i termini  $\Gamma_{ii}^0$ :

$$\begin{cases} \Gamma_{00}^0 = 0 \\ \Gamma_{11}^0 = -\frac{1}{2}g^{00} g_{11,0} = \frac{R\dot{R}}{1-kr^2} \\ \Gamma_{22}^0 = -\frac{1}{2}g^{00} g_{22,0} = r^2 R\dot{R} \\ \Gamma_{33}^0 = -\frac{1}{2}g^{00} g_{33,0} = r^2 R\dot{R} \sin^2 \theta \end{cases}$$

Ora, per gli altri termini sussiste la seguente:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\nu\lambda}^i &= \frac{1}{2}g^{i\sigma} (g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}) = \\ &= \frac{1}{2}g^{ii} (g_{i\nu,\lambda} + g_{i\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,i})\end{aligned}$$

dalla quale è immediato verificare che i termini con  $i \neq \lambda \neq \nu$  sono tutti nulli poichè il tensore metrico è diagonale. Quindi, per i termini a componente controvariante 1 ( $r$ ) si trova:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1}) = 0 \\ \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (g_{10,1} + g_{11,0} - g_{01,1}) = \frac{1}{2} \frac{(1-kr^2)}{R^2} \left( \frac{2R\dot{R}}{1-kr^2} \right) = \frac{\dot{R}}{R} \\ \Gamma_{10}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (g_{11,0} + g_{10,1} - g_{10,1}) = 0 \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) = \frac{1}{2} \frac{(1-kr^2)}{R^2} \frac{2krR^2}{(1-kr^2)^2} = \frac{kr}{1-kr^2} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (g_{11,2} + g_{12,1} - g_{12,1}) = 0 \\ \Gamma_{13}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (g_{11,3} + g_{13,1} - g_{13,1}) = 0 \\ \Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (g_{12,1} + g_{11,2} - g_{21,1}) = 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}) = -\frac{1}{2} \frac{(1-kr^2)}{R^2} 2R^2 r = -r(1-kr^2) \\ \Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (g_{13,1} + g_{11,3} - g_{31,1}) = 0 \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11} (g_{13,3} + g_{13,3} - g_{33,1}) = -\frac{1}{2} \frac{(1-kr^2)}{R^2} 2R^2 r \sin^2 \theta = -r(1-kr^2) \sin^2 \theta \\ \Gamma_{02}^1 &= \Gamma_{03}^1 = \Gamma_{20}^1 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{30}^1 = \Gamma_{32}^1 = 0\end{aligned}$$

per i termini a componente controvariante 2 ( $\theta$ ):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{20,0} + g_{20,0} - g_{00,2}) = 0 \\
\Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{20,2} + g_{22,0} - g_{02,2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2r^2}2R\dot{R}r^2 = \frac{\dot{R}}{R} \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}) = 0 \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2r^2}2R^2r = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{20}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{22,0} + g_{20,2} - g_{20,2}) = 0 \\
\Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{21,2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2r^2}2R^2r = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}) = 0 \\
\Gamma_{23}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{22,3} + g_{23,2} - g_{23,2}) = 0 \\
\Gamma_{32}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{23,2} + g_{22,3} - g_{32,2}) = 0 \\
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{23,3} + g_{23,3} - g_{33,2}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{R^2r^2}2R^2r^2 \sin \theta \cos \theta = -\sin \theta \cos \theta \\
\Gamma_{01}^2 &= \Gamma_{03}^2 = \Gamma_{10}^2 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{30}^2 = \Gamma_{31}^2 = 0
\end{aligned}$$

infine i termini a componente controvariante 3 ( $\varphi$ ):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{30,0} + g_{30,0} - g_{00,3}) = 0 \\
\Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{30,3} + g_{33,0} - g_{03,3}) = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2r^2 \sin^2 \theta}2R\dot{R}r^2 \sin^2 \theta = \frac{\dot{R}}{R} \\
\Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{31,1} + g_{31,1} - g_{11,3}) = 0 \\
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{31,3} + g_{33,1} - g_{13,3}) = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2r^2 \sin^2 \theta}2R^2r \sin^2 \theta = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{22}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{32,2} + g_{32,2} - g_{22,3}) = 0 \\
\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{32,3} + g_{33,2} - g_{23,3}) = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2r^2 \sin^2 \theta}2R\dot{R}r^2 \sin \theta \cos \theta = \cot \theta \\
\Gamma_{30}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{33,0} + g_{30,3} - g_{30,3}) = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2r^2 \sin^2 \theta}2R\dot{R}r^2 \sin^2 \theta = \frac{\dot{R}}{R} \\
\Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{33,1} + g_{31,3} - g_{31,3}) = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2r^2 \sin^2 \theta}2R^2r \sin^2 \theta = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{33,2} + g_{32,3} - g_{32,3}) = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2r^2 \sin^2 \theta}2R\dot{R}r^2 \sin \theta \cos \theta = \cot \theta \\
\Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{33,3} + g_{33,3} - g_{33,3}) = 0 \\
\Gamma_{01}^3 &= \Gamma_{02}^3 = \Gamma_{10}^3 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{20}^3 = \Gamma_{21}^3 = 0
\end{aligned}$$

Ora, il tensore di Ricci è definito dalla relazione:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda$$

e quindi  $g_{\mu\nu}$  diagonale implica che  $R_{\mu\nu}$  sia diagonale a sua volta. Le componenti del tensore di Ricci

sono quindi date da:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \Gamma_{00,0}^0 + \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00,2}^2 + \Gamma_{00,3}^3 + \Gamma_{01,0}^1 + \Gamma_{02,0}^2 + \Gamma_{03,0}^3 + \Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{0\lambda}^\sigma \Gamma_{0\sigma}^\lambda = \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 + 3 \left[ \frac{\ddot{R}}{R} - \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \right] + \Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{0j}^i \Gamma_{0i}^j \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 + 3 \left[ \frac{\ddot{R}}{R} - \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \right] + 0 - \Gamma_{0j}^i \Gamma_{0i}^j \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 + 3 \left[ \frac{\ddot{R}}{R} - \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \right] + 0 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 + 3 \left[ \frac{\ddot{R}}{R} - \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \right] + 0 + 3 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = 3 \frac{\ddot{R}}{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k}{1 - kr^2} \\
R_{22} &= r^2 (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k) \\
R_{33} &= r^2 \sin^2 \theta (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)
\end{aligned}$$

#### 4.4 Definizione di una Scala Temporale

La retrocessione nel tempo del modello di Friedmann non può essere portata fino a  $t = 0$  in quanto oltre a portare delle singolarità nelle grandezze fisiche, non tiene conto di altri fenomeni fisici che in determinate condizioni estreme diventano importanti, come i fenomeni quantistici. Nella trattazione classica condotta qui, bisogna fissare dunque un certo istante oltre il quale non è lecito andare. Consideriamo per semplicità l'universo di Einstein-De Sitter ( $k = 0$ ) e definiamo innanzitutto delle “tappe” in termini di temperatura, che è una delle quantità scalari che possono essere utilizzate per definire una scala di tipo cronologico.<sup>12</sup> Fissiamo queste tappe a ritroso come segue:

$T_0 = 3 \text{ }^\circ K$	$\rightarrow$	Fondo cosmico attuale
$T_{ric.} \approx 4000 \text{ }^\circ K$	$\rightarrow$	Era della ricombinazione
$T_{r.n.} \approx 10^6 \text{ }^\circ K$	$\rightarrow$	Periodo delle reazioni nucleari
$T_\mu \approx 10^{12} \text{ }^\circ K$	$\rightarrow$	$t'$ , l'istante iniziale scelto

La scelta dell'istante iniziale  $T_\mu$  è dettata dalla condizione:

$$kT_\mu = m_\mu c^2$$

cioè quello in cui la temperatura è tale che l'energia termica del sistema coincide con l'energia di massa a riposo del muone  $\mu$  ( $T_\mu = m_\mu c^2/k \approx 10^{12} \text{ }^\circ K$ ). Da questa temperatura a scendere non è più possibile la creazione per energia termica dei muoni: ovvero, l'energia di collisione delle particelle a temperatura inferiore a  $T_\mu$  non è più sufficiente per creare coppie di  $\mu$ . Poiché il muone è una particella instabile, una volta raggiunta una temperatura  $T < T_\mu$  i muoni spariranno perché decadranno. Si può ritenere quindi senza apprezzabile errore che per  $T < T_\mu$  esistano solo  $e^+$ ,  $e^-$ ,  $p$ ,  $n$ ,  $\gamma$ ,  $\nu_e$  e  $\bar{\nu}_e$  che formano quindi un plasma isotropo ed omogeneo termalizzato dalle reazioni:

$$\begin{cases} p + e \leftrightarrow n + \nu_e \\ \gamma + e \leftrightarrow \gamma + e \end{cases} \quad \text{Effetto Compton e Compton inverso.}$$

<sup>12</sup>Ricordiamo che essendo  $T \equiv T(t)$  dipendente solo dal tempo, è possibile utilizzare la temperatura  $T$  per folgiettare l'universo lungo l'asse temporale.

Non compare l'effetto Compton su protoni e neutroni a causa della elevata massa di questi ultimi.

Consideriamo ora la relazione fra l'entropia  $S$ , la densità  $\varrho$  e la pressione  $p$ . L'energia interna di un sistema è data da:

$$dU = -pdV + TdS \quad U = \varrho V$$

dove l'energia interna  $U$  è espressa dalla massa.

$$\begin{aligned} dS(T, V) &= \frac{d(\varrho V) + pdV}{T} = \frac{V}{T} \frac{d\varrho}{dT} dT + \frac{\varrho + p}{T} dV \Rightarrow \\ \frac{\partial S}{\partial T} &= \frac{V}{T} \frac{d\varrho}{dT} \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\varrho + p}{T} \end{aligned}$$

ed affinché sia un differenziale esatto deve verificarsi l'uguaglianza delle derivate miste:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} \rightarrow \frac{1}{T} \frac{d\varrho}{dT} = -\frac{1}{T^2}(\varrho + p) \rightarrow \frac{d\varrho}{dT} = -\frac{1}{T}(\varrho + p)$$

che sostituita nella relazione per  $dS(T, V)$  e integrando fornisce:

$$\begin{aligned} dS(T, V) &= \frac{p + \varrho}{T} dV - \frac{V}{T^2} (p + \varrho) dT \\ S &= \frac{p + \varrho}{T} V + \text{costante} \end{aligned}$$

Nella identità di Bianchi:

$$R^3 \frac{d\varrho}{dt} = \frac{d}{dt} [(p + \varrho) R^3]$$

si può sostituire la relazione sulla derivata di  $\varrho$ :

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{dT} \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{T} (p + \varrho) \frac{dT}{dt}$$

e quindi segue:

$$\begin{aligned} -\frac{R^3}{T} (\varrho + p) \frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt} [R^3 (\varrho + p)] &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{R^3}{T} (\varrho + p) dT + R^3 (\varrho + p) \right] &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \left[ R^3 \frac{\varrho + p}{T^2} dT + R^3 \frac{\varrho + p}{T} \right] &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \left[ R^3 \frac{\varrho + p}{T} \right] &= \frac{d}{dt} \left[ R^3 \frac{S(T, V)}{V} \right] = 0 \end{aligned}$$

e dunque l'entropia è costante:

$$\boxed{\frac{d}{dt} S(T, V) = 0}$$

se  $p = \varrho/3$  si trova  $\varrho = BT^4$ , e poiché vale anche per  $\varrho \propto R^{-4}$  ne consegue:

$$\boxed{T \propto \frac{1}{R}}$$

e se  $\varrho$  è proporzionale alla quarta potenza della temperatura, allora all'equilibrio (epoca della radiazione):

$$\boxed{\varrho = \sigma T^4}$$

quindi:

$$\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = -4 \frac{\dot{R}}{R} \quad ; \quad R = R_0 \frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} \quad \quad -4 \frac{\dot{R}}{R} = -4 \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \varrho$$

introducendo la dipendenza dal tempo  $\rho \equiv \rho(t)$  ed integrando:

$$t = \sqrt{\frac{3}{32\pi G\sigma} \frac{1}{T^2}}$$

ed essendo il coefficiente di proporzionalità ben noto, si è stabilita una relazione fra la temperatura dell'universo ed un intervallo temporale *misurato però a partire dall'istante che si era scelto come zero della scala temporale*. Nel caso preso come esempio:

$$\begin{array}{lll} T_\mu & \rightarrow & t = 0 \quad \text{per la convenzione scelta} \\ T \approx 10^{11} & \rightarrow & t = 0.01 \text{ s} \\ T \approx 10^{10} & \rightarrow & t = 1.07 \text{ s} \\ T_{ric.} & \rightarrow & t = 4 \times 10^5 \text{ anni} \\ T_0 & \rightarrow & t = 5 \times 10^{10} \text{ anni} \end{array}$$

## 4.5 La Radiazione Cosmica di fondo

Il Red-Shift per la radiazione di fondo è dato da:

$$z + 1 = \frac{R_0}{R_1} = \frac{T_1}{T_0} = \frac{4000}{3} \rightarrow z \approx 1500$$

infatti la radiazione cosmica a microonde risale al periodo in cui essa si è disaccoppiata dalla materia, e questo è avvenuto durante l'era della ricombinazione. Poiché per oggetti visibili vale  $z \cong 0.5 \div 4$ , essa costituisce l'immagine più vecchia che abbiamo dell'universo. La verifica della sua corrispondenza con lo spettro di corpo nero dà una base più scientifica alla ipotesi di omogeneità e isotropia.

Numerosi esperimenti hanno condotto alla stima attuale per la temperatura di corpo nero:

$$T = 2.7 \text{ }^\circ K \quad \frac{\delta T}{T} = 5 \times 10^{-6} \text{ su } 7^\circ \text{ e su } 30^\circ$$

Le fluttuazioni sulla temperatura  $\delta T/T$  implicano delle fluttuazioni sulla densità  $\delta \rho/\rho$  all'epoca della ricombinazione: queste piccole disomogeneità costituiscono il seme delle future galassie. Questo implica che:

$$\left| \frac{\Omega - 1}{\Omega} \right| = \frac{\rho_{ric.} - \rho_{ric.}^{critica}}{\rho_{ric.}} \cong 10^{-15} \rightarrow \boxed{\Omega = 1 \pm 10^{-15}}$$

ed essendo inoltre un valore estremamente critico (cioè instabile), prevede per oggi praticamente  $\rho \cong \rho_{critica}$ . Le deviazioni di  $\delta T/T$  su piccola scala ( $7^\circ$ ) sono dovute alle perturbazioni dovute all'effetto lente di materia compatta e forniscono informazioni sulle disomogeneità al tempo della ricombinazione. Su larga scala invece ( $30^\circ$ ) si osservano oggetti molto distanti fra loro e quindi si ricavano informazioni sull'isotropia.

Consideriamo ora un gas perfetto di fotoni e particelle ( $\gamma = C_p/C_V$ ):

$$p = nkT + \frac{A}{3}T^4 \quad \rho = nm + \frac{nkT}{\gamma - 1} + AT^4$$

al di sotto della temperatura di ricombinazione vale:

$$nR^3 = n_0R_0^3$$

e valendo la prima equazione di Friedmann:

$$\frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3pR^2$$

sostituendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR} \left( nmR^3 + \frac{nkT}{\gamma - 1} R^3 + AT^4 R^3 \right) &= -3nkTR^2 - AT^4 R^2 \Rightarrow \\ \frac{R}{T} \frac{dT}{dR} &= -\frac{s+1}{s + \frac{1}{3(\gamma-1)}} \quad s = \frac{4AT^3}{3nk} \cong 74 \frac{T^3}{n} \end{aligned}$$

(si è qui sfruttato il fatto che  $nR^3 = \text{costante}$  e  $nmR^3 = \text{costante}$ ). Consideriamo due casi:

1.  $s \ll 1$ .

$$\frac{dT}{dR} = \frac{3T}{R}(\gamma - 1) \Rightarrow \boxed{T = BR^{-3(\gamma-1)}}$$

2.  $s \gg 1$ .

$$\boxed{T = BR^{-1}}$$

ma  $s \gg 1$  significa che è costante perché  $T \propto R^{-1}$ :

$$s = 74B \frac{1}{nR^3}$$

La quantità  $s$  rappresenta, a meno di un fattore 0.4, il rapporto fra il numero di fotoni ed il numero di barioni e prende il nome di *entropia per barione*.

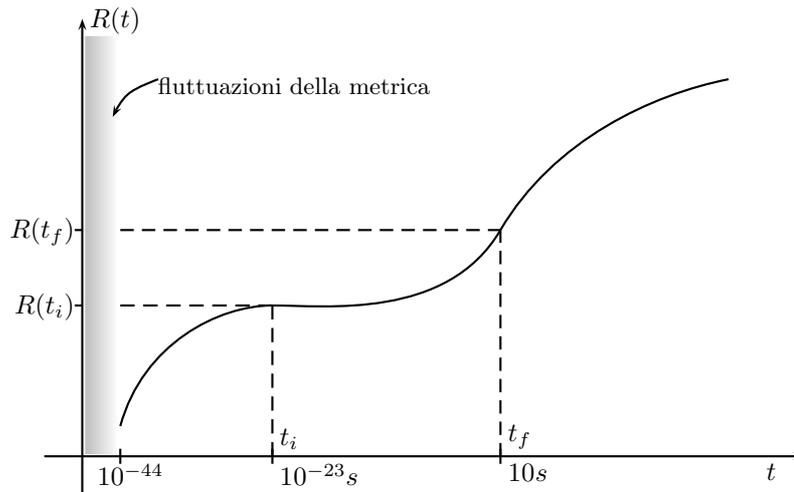
## 4.6 Il Modello Inflazionario

Ci sono molti problemi connessi con la teoria dell'universo caldo, cioè la teoria del Big-Bang tracciata fino ad ora. I più importanti di questi problemi sono:

- *Il problema della singolarità.* Lo stato di densità infinita a  $t = 0$  è detto singolarità. Le singolarità sono in genere il sintomo della caduta di validità di una teoria, ed in effetti ad istanti prossimi a  $t = 0$  gli effetti quantistici non sono più trascurabili. Ci si può chiedere inoltre cosa ci fosse prima del Big-Bang, cioè da dove ha tratto origine l'universo, se prima di  $t = 0$  non esisteva nulla.
- *Il problema della piattezza.* La curvatura dell'universo sembra molto prossima a zero. Cioè la geometria euclidea sembra descrivere l'universo molto bene. Il problema è: come mai la curvatura dell'universo è così vicina al valore critico?
- *Il problema dell'orizzonte.* Regioni causalmente distinte dell'universo appaiono avere la stessa temperatura con sorprendente precisione. Non si riesce a spiegare come le diverse regioni abbiano potuto raggiungere l'equilibrio termodinamico, pur non essendo mai venute in contatto causale fra loro.
- *Il problema dell'omogeneità e della formazione delle galassie.* Le osservazioni astronomiche mostrano che l'universo è estremamente omogeneo su scala molto grande. Sulla scala di  $10^{10}$  anni luce la distribuzione della materia si distacca dalla perfetta omogeneità per meno di una parte su mille. Su scala molto più piccola l'universo evidentemente non è per niente omogeneo. Esso contiene infatti stelle, galassie, cluster di galassie. Il problema è costituito dall'origine di queste disomogeneità.

Anche se il problema della singolarità rimane, a differenza della teoria del Big-Bang originale la teoria dell'universo inflazionario prevede che il fattore di scala non abbia avuto sempre una derivata seconda negativa, ma che abbia subito nei primissimi istanti una espansione esponenziale. Quindi nei modelli inflazionari<sup>13</sup> il fattore di scala dell'universo  $R(t)$  in funzione del tempo  $t$  è rappresentato da una curva di questo tipo:

<sup>13</sup>Non esiste un solo modello, quanto piuttosto una *classe* di modelli inflazionari. Qualunque modello che contempli nei primissimi istanti dell'universo una fase di espansione esponenziale è detto *inflazionario*.



dove vale la relazione  $R(t_f) \approx 10^{50}R(t_i)$ . Nel periodo di inflazione risulta dunque  $\ddot{R}(t) > 0$ , a differenza di oggi quando  $\ddot{R}(t) < 0$ . Questa espansione esponenziale può essere contenuta in un termine di costante cosmologica:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R - \Lambda g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{3}T_{\alpha\beta}$$

dove  $\Lambda$  rappresenta una forza repulsiva gravitazionale su larga scala (termine che, per inciso, conserva l'identità di Bianchi). Il modello omogeneo isotropo con costante cosmologica è dato da:

$$\dot{R}^2 + k - \frac{\Lambda}{3}R^2 = -\frac{8\pi G}{3}\rho R^2$$

e poiché vale la relazione  $\rho \propto R^{-4}$  si trova la seguente espressione per la II<sup>a</sup> equazione di Friedmann:

$$\dot{R}^2 + k - \frac{\Lambda}{3}R^2 = -\frac{8\pi G}{3}R^{-2}$$

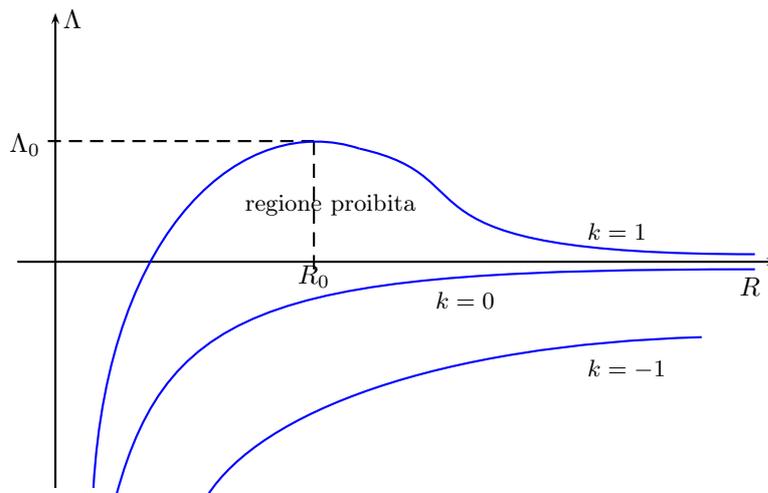
per cui si trova:

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}R^{-2} + \frac{\Lambda}{3}R^2 - k}$$

il che implica immediatamente la condizione:

$$\frac{8\pi G}{3}R^{-2} + \frac{\Lambda}{3}R^2 - k > 0$$

che può essere resa intuitiva per via grafica:



l'area al di sotto delle curve rappresenta la zona proibita. Ricordiamo che  $k = 1$  rappresenta un universo chiuso: il raggio totale è sempre limitato. Il termine  $\Lambda < 0$  fornisce un campo gravitazionale aggiuntivo e pertanto in questo caso tutti gli universi risultano chiusi. Per  $\Lambda > 0$  e  $k = 1$ , il punto di massimo  $\Lambda_0$  ed il corrispondente  $R_0$  rappresentano l'Universo statico di Einstein. Sono però possibili anche universi aperti con  $\Lambda = 0$ . Per  $\Lambda > 0$  e  $\Lambda < \Lambda_0$  vi sono soluzioni infinite senza singolarità iniziale e soluzioni finite.

Per valori di  $\Lambda_0$  appena maggiori di  $\Lambda_0$  si hanno i cosiddetti universi di Lemaître: si ha all'inizio una espansione rallentata e poi una ripresa accentuata del tasso di espansione.

Il modello più semplice è quello che si riduce al modello di Einstein-De Sitter ed è vuoto:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right) = \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow H^2(t) = \frac{\Lambda}{3}$$

dove la costante di Hubble  $H$  è sempre costante, e che fornisce come soluzione:

$$R(t) = R_0 e^{t\sqrt{\Lambda/3}}$$

Questo modello (dovuto a De Sitter, nel 1920) ha il pregio di essere senza singolarità e di fornire una espansione esponenziale.

Un meccanismo possibile responsabile della fase inflativa dell'universo viene dalle Teorie di Grande Unificazione (GUT). Secondo queste teorie, alla temperatura di  $10^{-44}s$  (corrisponde ad una energia di  $10^{19} GeV$ ) le leggi della fisica sono diverse da quelle note a bassa energia. Esse introducono anche delle particelle scalari mediatrici di forza, rappresentate appunto da un campo scalare. In quanto segue si supporrà sempre l'omogeneità e l'isotropia.

Le GUT tentano di unificare le tre interazioni fondamentali (elettromagnetica, debole e forte) e nel fare ciò prevedono che l'universo abbia subito una transizione di fase ad una temperatura critica di circa  $10^{27} \text{ }^\circ K$ , al di sopra della quale vi era simmetria nelle interazioni delle tre forze.

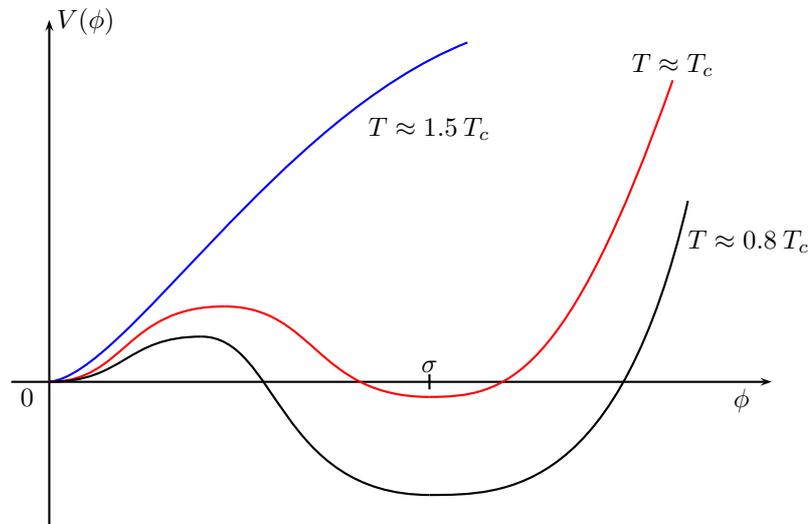
Per afferrare il concetto, si consideri l'analogia con il congelamento dell'acqua. Nello stato liquido c'è simmetria rotazionale in ogni punto dell'acqua; questa simmetria è invece persa, o "rotta", quando si forma il ghiaccio, perchè i cristalli di ghiaccio hanno una direzione preferita. Inoltre differenti porzioni di liquido possono iniziare a congelare indipendentemente le une dalle altre con un differente orientamento dell'asse dei cristalli, cosicchè quando l'intero corpo congela rimangono certi difetti ai contorni delle differenti porzioni.

In modo simile, nell'universo al di sopra di  $10^{27} \text{ }^\circ K$  la simmetria fra le tre interazioni è manifesta, invece al di sotto di questa temperatura la simmetria è rotta. Nell'acqua, il modo in cui la simmetria rotazionale è rotta in differenti regioni può essere caratterizzata dai parametri che descrivono l'orientazione dei cristalli di ghiaccio. Similmente, il modo in cui si rompe la simmetria fra le tre interazioni può essere caratterizzato dal fatto che certi parametri (noti come *campi di Higgs*) acquistano valore

diverso da zero: ci si riferisce a questo come a una *rottura spontanea della simmetria*. La simmetria è manifesta quando i campi di Higgs hanno valore zero, è spontaneamente rotta quando almeno uno di questi campi diventa non-zero. Proprio come nel caso del ghiaccio, rimangono certi difetti ai contorni di regioni differenti nelle quali la simmetria si è rotta in modo diverso, cioè acquistando diversi insiemi di valori per i campi di Higgs. Ci sono difetti puntiformi che corrispondono a *monopoli magnetici* e difetti bidimensionali chiamati *pareti di dominio*. Ci si aspetta che questi difetti siano molto stabili e massivi, un monopolo magnetico sarebbe ad esempio  $10^{16}$  volte più pesante di un protone.

Nessun successo del modello standard viene intaccato da questa teoria, che deve essere vista più che altro come una estensione della precedente, in quanto dopo i primi  $10^{-34}s$  i due modelli sono esattamente coincidenti.

Consideriamo ora per semplicità un singolo campo di Higgs, che prenderemo come un campo scalare  $\phi$ . Una forma tipo di questo potenziale è mostrata nella figura seguente.



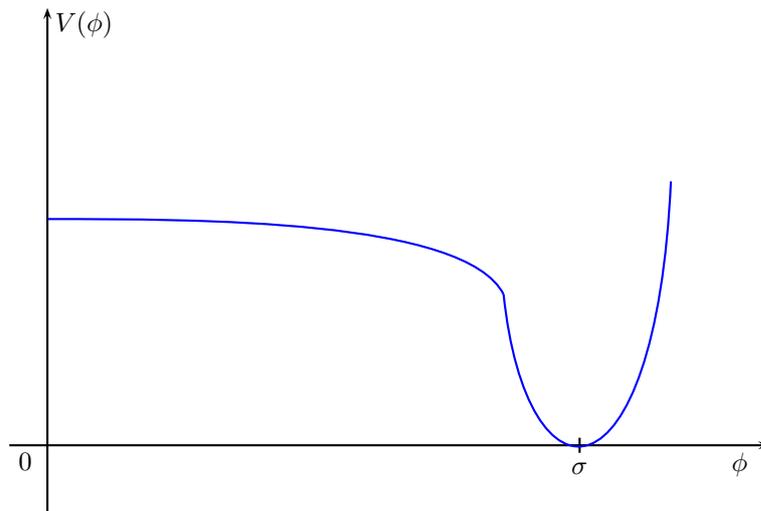
Consideriamo alcune proprietà di questo potenziale. Esso ha dei punti stazionari in  $\phi = 0$  e  $\phi = \sigma$ . In questi punti il sistema può dunque essere in equilibrio. Gli stati che corrispondono ai punti stazionari del potenziale sono detti *stati di vuoto*. A causa della particolare forma potenziale, l'energia dello stato  $\phi = 0$  è maggiore di quella di  $\phi = \sigma$ . Può esserci una situazione<sup>14</sup> in cui il sistema è "intrappolato" nello stato  $\phi = 0$  e non può effettuare una transizione nello stato  $\phi = \sigma$  a causa della barriera di potenziale, anche se questo stato è ad energia minore. In questa situazione lo stato  $\phi = 0$  è detto di *falso vuoto*, lo stato  $\phi = \sigma$  è detto *vero vuoto*. Vediamo ora come collegare tutto questo con il primo universo e l'inflazione.

Si assuma che nell'universo primitivo ci siano state regioni più calde di  $10^{27} \text{ }^\circ\text{K}$ <sup>(15)</sup> e che queste siano in fase di espansione. La simmetria fra le interazioni era manifesta e  $\phi = 0$ . A causa dell'espansione la temperatura decresce e, quando cade al di sotto della temperatura critica, diviene termodinamicamente favorevole per il campo di Higgs acquisire un valore diverso da zero. Tuttavia, per alcuni dei parametri delle GUT, la transizione di fase avviene lentamente comparata con il tasso di raffreddamento. Questo implica che anche al di sotto di  $10^{27} \text{ }^\circ\text{K}$  il campo di Higgs rimane zero, un caso perfettamente analogo al sottoraffreddamento. Questa è la situazione di falso vuoto ed ha come conseguenza che la regione si raffredda molto ad un alto tasso di espansione.

Il potenziale mostrato nella figura precedente utilizzato in questa discussione qualitativa conduce però a dei problemi che possono essere risolti utilizzando un tipo di potenziale come mostrato nella figura seguente:

<sup>14</sup>Tale situazione può essere dovuta a quanto segue. La figura mostra anche l'andamento che deve avere questo potenziale con la temperatura. A temperature maggiori di una certa temperatura critica, la curva del potenziale possiede un solo minimo a  $\phi = 0$ . Con l'abbassarsi della temperatura, la curva del potenziale si modifica come mostrato nella figura ed il sistema, che inizialmente si può supporre nello stato di equilibrio con potenziale nullo, rimane nello stato  $\phi = 0$  anche con la presenza dei nuovi minimi a  $\phi = \sigma$ .

<sup>15</sup>La temperatura critica.



Come detto, il modello inflazionario incorpora tutte le predizioni del modello standard per l'universo osservabile, perché i due modelli hanno lo stesso comportamento dopo  $t = 10^{-32}$  s. Da circa  $t = 10^{-34}$  s a  $t = 10^{-32}$  s invece i due modelli sono radicalmente diversi: una regione dell'universo sottostà ad una espansione esponenziale e ad un raffreddamento e dopo questo periodo di espansione e raffreddamento viene riscaldata ad una temperatura giusto inferiore a quella critica.<sup>16</sup> Dopo di questo, l'evoluzione è la stessa del modello standard, con l'importante differenza che ora la regione iniziale era all'interno della distanza di orizzonte, ed ha avuto quindi tempo di omogeneizzarsi ed essere alla stessa temperatura. Dopo l'inflazione l'intero universo osservabile può giacere all'interno di una di queste regioni, cosicché il problema dell'orizzonte non esiste più. Analizzeremo questo in maggiore dettaglio, sempre in maniera qualitativa, considerando il secondo dei due potenziali mostrati.

Consideriamo quindi l'evoluzione di una regione a temperatura superiore alla temperatura critica. Come visto, la differenza con il modello standard è data dalla presenza di un potenziale di Higgs: la presenza di questo potenziale altera radicalmente l'evoluzione temporale del fattore di scala nelle epoche molto primitive, ma dopo  $t = 10^{-32}$  s evolve esattamente come il modello standard. Come detto sopra, al di sopra di  $10^{27}$  °K le fluttuazioni termiche conducono il valore del campo di Higgs a zero e la simmetria è manifesta. Quando la temperatura diminuisce, il sistema subisce una transizione di fase con almeno un campo di Higgs che acquisisce un valore non zero (ed in questo esempio ne consideriamo solo uno), risultandone una fase a simmetria spezzata. Per certi valori dei parametri, che si può assumere sia il caso, il tasso della transizione di fase è molto lento comparato con il tasso di raffreddamento. Questo causa un sottoraffreddamento del sistema ad una temperatura bassa con il campo di Higgs ancora a valore nullo, risultando uno stato di falso vuoto. Ora, le fluttuazioni quantistiche o termiche consentono al campo di Higgs di deviare dal valore nullo; all'inizio il tasso di questo cambiamento è lento, ma aumenta rapidamente all'avvicinarsi allo stato di vero vuoto. Quando il campo è nella regione più piatta del diagramma la regione subisce una espansione accelerata, raddoppiando le dimensioni ogni  $t = 10^{-34}$  s. Quando il valore del campo di Higgs raggiunge la parte inferiore della curva di potenziale, l'espansione cessa e la regione ha raggiunto un fattore di espansione di  $10^{50}$  o più.

La raffigurazione data è naturalmente molto semplificata. Come già detto, possono esserci diversi stati a simmetria spezzata, perciò diverse regioni avrebbero rotto la simmetria diversamente, ed ogni regione sarebbe circa della stessa grandezza dell'orizzonte di quel tempo. L'orizzonte ad un tempo  $t$  è dato evidentemente da  $ct$ , cioè la distanza percorsa dalla luce nel tempo  $t$ , quindi a  $t = 10^{-34}$  s l'orizzonte è circa di  $10^{-24}$  cm. Una volta che si è formato un dominio con un particolare insieme di campi di Higgs diversi da zero, esso gradualmente raggiunge uno degli stati stabili a simmetria rotta e subisce una inflazione di  $10^{50}$ . Perciò dopo l'inflazione, la grandezza di un

<sup>16</sup>Questo riscaldamento è dovuto ad un analogo del calore rilasciato dopo il sottoraffreddamento dell'acqua (calore latente di fusione) ed è dovuto alla transizione allo stato di vero vuoto.

singolo dominio sarebbe approssimativamente di  $10^{26}$  cm. A quell'epoca l'intero universo osservabile misurava solo 10 cm circa, cosicché esso potrebbe stare comodamente in un singolo dominio. Poiché l'universo osservabile avrebbe avuto origine da una regione che giaceva all'interno dell'orizzonte, esso avrebbe avuto tempo per omogeneizzarsi e raggiungere una temperatura uniforme. Questo risolve il problema dell'orizzonte.

A causa dell'enorme inflazione, qualunque densità presente prima sarebbe stata ridotta quasi a zero dopo l'inflazione. La maggior parte dell'energia sarebbe stata incorporata nel campo di Higgs. Dopo che il campo di Higgs evolve lungo la porzione piatta della curva in figura, esso discende nella buca di potenziale (a forma di oscillatore armonico) ed "oscilla" vicino allo stato di vero vuoto  $\phi = \sigma$ . Queste "oscillazioni" sono smorzate ed all'energia dissipata corrisponde la creazione di un'alta densità di particelle di Higgs<sup>17</sup>. Le particelle di Higgs sarebbero instabili e sarebbero decadute in particelle più leggere, il sistema avrebbe quindi raggiunto rapidamente lo stato di un gas caldo di particelle elementari un equilibrio, simile alla condizione iniziale assunta nel modello standard. Il sistema si sarebbe quindi riscaldato ad una temperatura di circa  $2 \div 10$  volte inferiore alla temperatura critica di  $10^{27}$  °K. Dopo di ciò l'evoluzione segue il modello standard.

Dopo aver descritto in modo qualitativo le caratteristiche essenziali del modello inflazionario, diamo una velocissima traccia dell'approccio formale al problema.

In genere, data una lagrangiana di campo scalare della forma (retta dalla equazione di Klein-Gordon):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$$

la lagrangiana totale del sistema (lagrangiana gravitazionale + lagrangiana scalare) può essere scritta nella forma:

$$L = \sqrt{g} \left( \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right)$$

dove il fattore  $R$  tiene conto della curvatura. Questa lagrangiana prende il nome di *lagrangiana di accoppiamento minimo* ed è diversa dalla lagrangiane utilizzate normalmente perché è del secondo ordine nella metrica. Tuttavia non compaiono i termini del terzo ordine perché i termini del secondo ordine possono essere riscritti in termine di divergenze totali, che vengono eliminate tramite il principio variazionale.

In questo caso lo zero del potenziale non può essere scelto arbitrariamente a causa della presenza del fattore  $\sqrt{g}$  che fra l'altro assicura la tensorialità della densità  $\mathcal{L}$ . Le equazioni di Friedmann prendono la forma:

$$\ddot{\varphi} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \dot{\varphi} + V(\varphi) = 0$$

$$\left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\dot{\varphi}}{2} + V(\varphi) \right)$$

La prima delle due equazioni restituisce l'equazione di Klein-Gordon, mentre la seconda fornisce l'evoluzione temporale.

Il passaggio di fase si produce in un periodo per cui risulta:

$$R(t) = \text{cost} \cdot e^{Bt} \quad B = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} V(0)}$$

Da questa equazione si vede l'analogia del termine  $V(0)$  con la costante cosmologica. Va detto tuttavia che l'approccio derivato da una lagrangiana indipendente dalla temperatura non dà la corretta espansione esponenziale. Si deve quindi introdurre un accoppiamento non minimo, del tipo  $\xi^2 \varphi R$ , fra la curvatura ed il campo scalare. Questo tipo di interazione è quello correntemente utilizzato nelle teorie di Yang-Mills.

<sup>17</sup>Si ricordi, in analogia, che un alto livello di energia per un oscillatore armonico corrisponde ad un grande numero di "eccitazioni" del campo elettromagnetico, cioè ad un grande numero di fotoni.

≈≈ *FINE* ≈≈

