

THÉORIE CLASSIQUE DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

auteur : VALERIANO BARASSI

2020

Cet œuvre est soumise à la Creative Commons Public License version 4.0 ou successives. Le texte complet de la Licence version 4.0 est disponible à l'adresse suivant :

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>.

- Vous êtes autorisé à copier, distribuer et communiquer le matériel par tous moyens et sous tous formats :

Attribution. Vous devez créditer l'Œuvre, intégrer un lien vers la licence et indiquer si des modifications ont été effectuées à l'Œuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens raisonnables, sans toutefois suggérer que l'Offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son Œuvre,

Pas d'utilisation commerciale. Vous n'êtes pas autorisé à faire un usage commercial de cette Œuvre, tout ou partie du matériel la composant,

Pas de modification. Dans le cas où vous effectuez un remix, que vous transformez, ou créez à partir du matériel composant l'Œuvre originale, vous n'êtes pas autorisé à distribuer ou mettre à disposition l'Œuvre modifiée.

- Toutes distribution de cet Œuvre doit être faite suivant les termes de cette licence, qui doit être indiqué clairement.
- Il est possible de chercher un accord avec le détenteur des droits d'auteur (dans ce cas, l'auteur) afin d'utiliser cet ouvrage en dehors de la licence.

Cet œuvre fait usage du droit de citation prévue à l'article 10 de la Convention de Berne sur le droit d'auteur.

“L’électricité est souvent définie merveilleuse et belle ; mais seulement si on la confronte avec les autres forces de la nature. La beauté de l’électricité, ou de n’importe quelle autre force, ne réside pas dans le fait que son pouvoir est mystérieux et inattendu et frappe les sens de façon imprévue, mais part de la constatation qu’elle est soumise à une loi aisément gouvernable par une intelligence instruite.”.

– Michael Faraday

Table des matières

NOTES	vi
RÈGLES TYPOGRAPHIQUES	vii
1 Electrostatique dans le vide	1
1.1 Phénoménologie. Loi de Coulomb	1
1.2 Le champ électrique et le potentiel	2
1.2.1 Le champ électrique	2
1.2.2 Le potentiel électrostatique	3
1.2.3 Circulation et flux du champ électrostatique	5
1.2.4 Forme locale	7
1.3 Champs électrique de quelques systèmes de charges	8
1.3.1 Points d'équilibre dans un champ électrostatique	9
1.3.2 Fil infini chargé	9
1.3.3 Plan infini uniformément chargé	9
1.3.4 Deux plaques parallèles chargées	10
1.3.5 Sphère uniformément chargée en volume	10
1.4 Le dipôle électrostatique	11
1.4.1 Actions mécaniques sur un dipôle électrique	12
1.5 Développement multipolaire	13
2 Conducteurs et champs électrostatique	17
2.1 Distribution des charges dans le conducteurs	17
2.1.1 Champ électrostatique et distributions de charges	17
2.1.2 Énergie potentielle électrostatique	21
2.1.3 Effets mécaniques d'origine électrostatique	25
2.2 Capacité électrique	26
2.2.1 Capacité d'un conducteur isolé	26
2.2.2 Capacité d'un ensemble de conducteurs. Condensateurs	27
2.3 Le problème général de l'électrostatique dans le vide	30
2.3.1 Propriétés mathématiques de l'équation de Poisson	32
2.4 Techniques pour résoudre le problème général dans quelques cas particuliers	33
2.4.1 Méthode des images	33
2.4.2 Équation de Laplace en dimension 1	36
2.4.3 Séparation des variables	36
2.4.4 Résolution dans le champ complexe	37
3 Electrostatique en présence de diélectriques	41
3.1 La constante diélectrique	41
3.2 Le vecteur polarisation et les charges liées	43
3.2.1 Le champ électrique à l'intérieur des diélectriques	45
3.3 Les équations de l'électrostatique en présence de diélectriques	47

3.4	Énergie et forces électrostatiques en présence de diélectriques	51
3.5	Origine microscopique de la constante diélectrique	54
3.5.1	Polarisation de déformation	54
3.5.2	Polarisation d'orientation	55
4	Courant électrique en régime continu	57
4.1	Corps conducteurs et courant électrique	57
4.2	Densité de courant et équation de continuité	59
4.3	Résistance électrique	62
4.4	Force électromotrice	64
4.5	Applications de la théorie à la résolution des circuits	66
4.6	Courant en régime quasi-stationnaire	71
4.7	Conduction électrique dans les liquides et les gaz	73
4.7.1	Conduction dans les liquides	73
4.7.2	Conduction dans les gaz	76
4.8	Générateurs de force électromotrice	77
4.8.1	Théorie	77
4.8.2	Pile de Volta	79
4.8.3	Pile de Daniell	80
4.8.4	Modèles principaux de batteries modernes	81
5	Magnétostatique dans le vide	83
5.1	Principes phénoménologiques. Force de Lorentz	83
5.1.1	Applications pratiques de la force de Lorentz	85
5.2	Champ \vec{B} généré par des courants stationnaires	87
5.3	Propriétés du vecteur induction magnétique	90
5.4	Potentiels magnétostatiques	95
5.4.1	Potentiel scalaire	96
5.4.2	Potentiel vecteur	98
5.5	Actions mécaniques sur les circuits parcouru par courant électrique	100
5.6	Intéactions entre circuits parcouru par un courant continu	103
5.7	Champs électrostatique est magnétostatique en relativité restreinte	105
5.7.1	Approfondissement sur la relation entre champ électrique, induction magnétique et principe de relativité	107
6	Magnétisme dans la matière	111
6.1	Généralités	111
6.2	Polarisation Magnétique	115
6.3	Les équations de la magnétostatique dans la matière	118
6.4	Comportement des matériaux dans un champ magnétique	121
6.4.1	Diamagnétisme	122
6.4.2	Paramagnétisme	123
6.4.3	Ferromagnétisme	124
7	Champs électriques et magnétiques variables	127
7.1	Induction électromagnétique. Loi de Faraday-Neumman	127
7.2	L'importance de le loi de Neumann-Faraday	130
7.3	Forme locale : troisième et quatrième equation de Maxwell dans le cas non stationnaire	132
7.4	Auto-induction. Coefficient de auto-inductance. Inductance Mutuelle	135
7.4.1	Auto-induction	135
7.4.2	Inductance Mutuelle	138
7.4.3	Forces d'interaction magnétique	140
7.4.4	Transformateurs	142

NOTES

Cet œuvre traite du programme du cours d'électromagnétisme classique, tel qu'il est enseigné à la Faculté de Physique de l'Université de Naples "Federico II".

Ces notes ne doivent absolument pas être considérées comme exhaustives du sujet, compte tenu de la grande quantité de textes sur le sujet. L'auteur a voulu plutôt fournir un cadre général de la matière laissant les approfondissements nécessaires (par exemple, le calcul détaillé de certains cas spécifiques) aux cours et aux textes dédiés. Cela signifie que dans ce cours vous ne trouverez pas les exercices classiques que l'on trouve dans d'autres textes (ils sont limités uniquement aux cas vraiment fondamentaux pour la compréhension de la théorie) et que la discussion est surtout théorique.

L'auteur a cependant souhaité apporter sa touche personnelle en se concentrant davantage sur les aspects physiques et conceptuels des sujets par rapport aux traitements habituels, afin de rendre plus évident le parcours logique qui a permis de construire la théorie de l'électromagnétisme classique. Pour ce faire, l'auteur a été inspiré par le texte des conférences de Feynman.

La présentation de la matière suit la structure du texte sur lequel a étudié à son temps l'auteur.

Cet œuvre est librement distribué dans l'espoir qu'il sera utile pour la préparation aux examens, soumis à la seule condition que l'on cite l'auteur et la source.

CONVENTIONS TYPOGRAPHIQUES

Le tableau suivant présente les conventions utilisées dans le texte. Nous avons essayé dans la mesure du possible d'éviter toute ambiguïté où traditionnellement les mêmes symboles sont utilisés pour différents variables physiques (par exemple, le "phi" utilisé à la fois pour le potentiel et la variable angulaire)

<i>Symbole utilisé</i>	<i>Variable physique</i>
φ	phase
θ, ϕ	Variables angulaires
Ω	Angle Solide
\mathcal{V}	Volume
V	Potentiel générique
E	Énergie
E	Champ électrique
ϵ	Quantité infinitésimale
M	Moment d'une force
J, j	Densité de courant
L	Travail (d'une force)
ϕ	Potentiel électrostatique ou magnetostatique
A	Potentiel vecteur
ρ	Densité
\vec{v}	Vecteur(*)

(*)Le symbole $\vec{}$ est toujours utilisé où nécessaire.

En ce qui concerne les charges électriques, dans ce cours nous utilisons la convention visuelle d'indiquer en rouge les charges positives et en bleu les charges négatives. En cas le signe de la charge n'aurait pas d'importance, celle-ci est notée en noir :

• Positive
 • Negative
 • non défini

Électrostatique dans le vide

1.1 Phénoménologie. Loi de Coulomb

Il est connu depuis l'antiquité qu'en plus des forces mécaniques (tel que la gravitation, le poids, les forces de contacts, ...) et les transformations liées aux échanges thermiques (thermodynamique et mécanique statistique), entre certains corps peut agir un autre type de force, généralement à cause de la friction, qui s'exerce à distance.

Les premières expériences de cette force remontent aux Grecs, qui avaient remarqué qu'en frottant de l'ambre on pouvait attirer des petites particules. Étant donné que le mot grec pour "ambre" est ἤλεκτρον, *elektron*, à ce genre de force on a donné le nom de forces *électriques*.

Certaines expériences successives ont montrées que les actions peuvent être de deux types, attractives et répulsives : deux morceaux d'ambre frotté se repoussent. D'autres expériences montrent également que si le corps A attire le corps B et le corps B attire le corps C, alors A et C se repoussent. Ces expériences permettent de conclure qu'il y a deux "entités" de nature électrique, et que les "entités" homologues se repoussent alors que les différentes s'attirent les unes les autres. A ces "entités" ont donné le nom de *charges électriques*.

Par convention, nous disons que les charges des substances tel que l'ambre sont des charges électriques *néglatives*, tandis que celles portés par les autres substance (tel que le verre) sont des charges *positives*.

Aujourd'hui, nous savons que les charges électriques sont portées par les constituants élémentaires de la matière, à savoir *électrons* et *protons*, bien que dans le contexte de l'électrodynamique classique une charge positive est le plus souvent représenté par l'*absence* d'un électron (appelée *trou*).

Une propriété remarquable de ces charges, qui aucune expérience d'aucune sorte n'a jamais démentie, est la **conservation de la charge électrique** : la somme des charges électriques reste constante au cours du temps. Dans une expérience de n'importe quelle nature, la seule chose qui se produit est le transfert de charge électrique d'un corps à l'autre.

Au moyen de nombreuses et variées expériences réalisées avec une balance de torsion, Charles-Augustin Coulomb arriva à établir la loi de la force électrostatique, à savoir la force ressentie par deux charges électriques. Il put établir que cette force dépend d'une manière proportionnelle aux charges, de l'inverse du carré de la distance entre les deux charges et que *la force est une force vectorielle*.

Supposons d'avoir deux charge électriques q_1 et q_2 dans le vide à distance r . La force \vec{F}_{21} ressentie par q_2 à cause de q_1 peut être décrite par :

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21}$$

où \hat{r}_{21} est vecteur unitaire orienté de q_1 à q_2 . Dans le système MKS (où l'unité de mesure de la

charge électrique est le *Coulomb*, C) la constante a forme et valeur :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \epsilon_0 = 8.85418781762 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Nm^2}$$

ce qui permet d'obtenir la *Loi de Coulomb* :

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21} \quad (1.1)$$

On nomme la constante ϵ_0 *constante diélectrique du vide* ou *permittivité diélectrique du vide* et il s'agit d'une constante qui met en corrélation quantités électriques et mécaniques.

Plusieurs observations importantes sont à faire concernant cette formule.

- $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, à savoir le principe d'action et de réaction est valide
- Nous avons le produit des deux charges $q_1 q_2$. Donc si les charges ont le même signe, alors \vec{F}_{21} est concordant avec \hat{r}_{21} et la force est répulsive, à l'inverse si les charges ont signes contraires.
- Le principe de superposition est valide et cela se reflète dans le fait que la force de Coulomb est une force *vectorielle*. Si deux charges q_1 et q_2 agissent sur un troisième q_3 , alors la force résultante sur la troisième est donnée par la composition vectorielle des forces exercées indépendamment de chacune des charges q_1 et q_2 . Ce point est extrêmement important, car il nous permet d'affirmer que la force exercée par un système complexe de charges peut se décomposer dans la somme vectorielle des forces exercées par les charges individuellement. Formellement, cela signifie que les résultats de l'analyse vectorielle et intégrale peuvent être utilisés légitimement dans le cadre des interactions électriques (et plus généralement pour l'ensemble de l'électromagnétisme).
- Last but not least, le rapport entre la force de Coulomb et la force gravitationnelle exercée entre deux charges étant de l'ordre de 10^{40} , les interactions gravitationnelles peuvent être complètement négligés en électrodynamique.

1.2 Le champ électrique et le potentiel

1.2.1 Le champ électrique

La loi (1.1) contient évidemment en elle-même tous les phénomènes de l'électrostatique. Cependant, d'un point de vue pratique l'utilisation directe de la loi Coulomb n'est pas évident, surtout si elle doit s'appliquer à une distribution complexe de charges.

Il est utile donc d'introduire le concept de *champ électrique*. Nous définissons *champ électrique en* $P(x, y, z)$ *généralisé par la charge* q_1 *la force qui s'applique sur une charge unitaire en repos à cet endroit :*

$$\vec{E}(x, y, z) : \vec{F}_P(q_2) = \vec{E}(x, y, z) q_2$$

de cette définition il est immédiat de voir que le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{r}_{21}$$

Le concept de champ électrique peut se dissocier de celui de charge d'essai q_2 afin de le rendre un concept indépendant. Dans ce sens, on peut écrire formellement :

$$\vec{E}(x, y, z) = \lim_{q_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(x, y, z)}{q_2}$$

Il faut remarquer que le champ électrique est lui aussi un champ vectoriel pour lequel le principe de superposition garde sa validité. Le champ d'une distribution de charges est donc donné par la somme vectorielle des champs électrostatiques générés par chaque charges indépendamment des autres.

$$\vec{E}(P_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{r_j^2} \hat{r}_{j1}$$

Cela signifie cependant que nous avons toujours besoin de trois équations pour décrire le champ électrique en chaque point de l'espace, équations qu'en général sont très difficiles à intégrer directement même si d'un point de vue conceptuel le problème générale de l'électrostatique est complètement résolu.

Puisque en général nous avons à faire à des distributions continues de charges¹ et le principe de superposition étant valide, une première généralisation consiste à prendre en compte des densités volumiques de charge électrique $\rho(x, y, z)$ définies de façon tel que la charge dq contenue dans un volume dV soit donnée par $dq = \rho(x, y, z)dV$. De façon similaire, nous pourrions définir une densité superficielle de charge $\sigma(x, y, z)$ ou une densité linéaire $\lambda(x, y, z)$ si la géométrie du système est tel que les charges sont réparties sur une surface ou une ligne.

En ces termes, le champ électrique en un point est calculé avec une intégrale sur le volume contenant les charges (ou éventuellement sur l'espace entier, car la partie de volume ne contenant pas de charge ne contribuera pas à l'intégrale) :

$$\vec{E}(P_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(P_2)}{r_{21}^2} \vec{r}_{21} dV_2 \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(P_2)}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} dV_2$$

Toutefois, la forme explicite de cette intégrale ne nous permet pas d'avancer beaucoup d'un point de vue pratique. Il s'agit toujours d'intégrer trois équation – une pour chaque composantes du champ électrique – dont la forme explicite pour la direction x du champ électrique est :

$$\vec{E}_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(x - x')\rho(x', y', z')}{[\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}]^3} dx' dy' dz' \quad (1.2)$$

Même si – encore une fois – toute l'électrostatique est contenue dans cette formule, elle n'est pas simple à résoudre dans la plus part des cas réels. Nous avons donc besoin d'autres outils de calculs.

1.2.2 Le potentiel électrostatique

Par analogie avec le potentiel gravitationnel en mécanique classique, posons-nous la question de savoir quel est le travail nécessaire afin de déplacer une charge électrique dans le champ électrostatique généré par une distribution de charges données. D'après la définition, le travail fait contre les forces électrique est la force de Coulomb le long de la direction de déplacement, multipliée par le déplacement et inversé de signe. En termes formelles, le travail pour se déplacer d'un point A à un point B est :

$$L = - \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

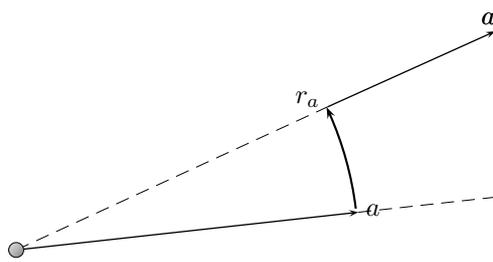
où le signe moins est dû au fait que le travail se fait contre le champ électrostatique. La notion de travail par unité de charge est plus intéressant. Dans ce cas, la force agissant sur la charge est la valeur du champ électrique le long des points qui composent le chemin de la charge, à savoir :

$$L = - \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \quad (1.3)$$

En principe, cette intégrale dépend du chemin. Il serait donc possible de passer de A à B le long d'un chemin en faisant un certain travail L et revenir en A le long d'un autre chemin où le travail rendu est majeur. Les contraintes sur les sources du champs pourraient les déplacer de telle sorte qu'elle perdent de l'énergie en bougeant, mais ce n'est pas le cas d'un champ *électrostatique*. Dans ce cas les sources sont fixés par définition et aucun travail ne peut être effectués sur elles en supposant que le principe de conservation de l'énergie est valide, ce qui est considéré comme toujours être le cas.

Dans ces hypothèses il est facile de montrer que dans un champ de coulomb le travail ne dépend pas du chemin.

1. En effet, nous allons négliger le fait que la matière est finalement constituée d'éléments discrets, en cas de distributions macroscopiques discrètes de charges il suffira de considérer des séries à la places des intégrales.



Le travail effectué pour aller d'un point a à un point a' peut se décomposer en un arc de cercle à une distance fixe $r = r_a$ et dans le tronçon le long de la radiale pour aller de r_a jusqu'à a' . Le travail effectué le long de l'arc de cercle est zéro parce que le champ de Coulomb est radiale et donc le déplacement est toujours perpendiculaire au champ, d'où $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. Le long du segment radial, la projection du champ coïncide avec le champ lui-même qui varie en $1/r^2$ et le travail est :

$$L = - \int_a^{a'} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{a'} \frac{dr}{r^2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_{a'}} - \frac{1}{r_a} \right]$$

Sur chaque arc de cercle le travail est nul, par contre sur chaque segment radial le travail a la forme indiquée ci-dessus. Puisque les intégrales bénéficient de la propriété additive, le travail total pour aller d'un point a à b le long d'une courbe segmenté tel que montré ci-dessus vaut :

$$L = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{a'} \frac{dr}{r^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{a'}^{a''} \frac{dr}{r^2} - \dots - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{a^n}^b \frac{dr}{r^2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right]$$

Chaque chemin peut être approché par des sections d'arcs et radiale infinitésimales, la limite de ces segments ayant tendance à zéro, nous pouvons donc déduire que *le travail effectué contre le champ électrostatique pour aller d'un point a à un point b est indépendant du chemin choisi.*

Il est important de remarquer que la seule hypothèse intervenue dans le raisonnement est que la force soit radiale. Pour n'importe quel champ ayant une symétrie radiale le travail ne dépend pas du chemin, mais seulement du point de départ et d'arrivée.

Or, si le travail ne dépend que du point de départ et d'arrivée il peut être exprimé comme différence de deux nombres. Si nous choisissons un point de repère P_0 , le travail pour aller de P_0 à a aura une certaine valeur $V(a)$. De façon similaire, le travail pour aller de P_0 à b aura une valeur $V(b)$. Nous pouvons donc écrire le travail pour aller de a à b comme $V(b) - V(a)$, car nous pouvons toujours penser d'arriver à b en passant par P_0 . Et dans ce cas, le travail pour aller de a à P_0 est $-V(a)$, d'où la formule.

En se basant sur ce raisonnement nous comprenons aussi que la fonction V ne rentre dans les formule qu'en tant que différence de deux valeurs. Cette fonction est donc définie à une constante près. Étant la valeur de cette constante arbitraire, elle est choisi de façon que la fonction vaille 0 pour une charge à l'infini. Cette fonction ainsi défini est appelée *potentiel électrostatique* et s'écrit :

$$V(\vec{r}) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \quad (1.4)$$

et de façon similaire si nous avons à faire avec des distribution de charge superficielle ou linéaires.

Le principe de superposition garde sa validité bien évidemment aussi pour le potentiel, car si le champ en a est la superposition de plusieurs champs, l'intégrale définissant le travail (1.3) peut être vue comme la somme d'autant d'intégrales que des champs des charges sources, où chacune de ces intégrales apporte le terme de potentiel de chaque source.

D'un point de vue physique, le potentiel électrostatique représente *l'énergie potentielle que une charge unitaire aurait se elle était amenée en un point spécifique de l'espace à partir de l'infini.*

L'utilité d'introduire une autre fonction est que maintenant *le potentiel électrostatique est une fonction scalaire et non plus vectorielle.* Nous n'avons plus besoin de calculer trois intégrales plus ou

moins complexes et dans beaucoup d'applications pratiques le potentiel (qui va comme $1/r$) est plus simple à calculer que le champ (qui va comme x/r^3). De plus, le potentiel électrostatique et le champ électrique sont liés par une relation très simple.

Pour montrer cela, considérons deux points, x et $x + dx$. Le travail fait pour amener une charge unitaire d'un point à l'autre le long de l'axe x est $V(x + dx) - V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} dx$. Mais le travail est aussi par définition égal à :

$$L = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_x dx = \frac{\partial V}{\partial x} dx$$

le même raisonnement peut être appliquée aux autres deux dimensions, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}V} \quad (1.5)$$

à savoir, que le champ électrique est égal au gradient du potentiel inversé de signe. Par conséquent :

- Le champ électrique est toujours perpendiculaires aux lignes équipotentielles,
- Un potentiel constant correspond à un champ électrique nul.

1.2.3 Circulation et flux du champ électrostatique

Puisque le travail effectué sur une charge élémentaire ne dépend que des points de départ et d'arrivée (grâce à laquelle propriété nous avons pu définir un potentiel électrostatique) il est immédiat de constater que le travail le long d'une courbe fermée est toujours nul :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \equiv 0 \quad (1.6)$$

Un champ qui bénéficie de cette propriété est dit *conservatif* et l'annulation de la circulation est sa formulation intégrale.

La circulation d'un champ ne permet pas de définir complètement un champ vectoriel. Notamment, dans le cas du champ électrique celle-ci permet de formaliser le fait que le champ est radial mais pas qu'il décroît selon la lois de Coulomb $1/r^2$.

Afin de formaliser cette seconde propriété du champ électrostatique, ce qui permettra de le définir complètement, considérons le *flux* de ce vecteur. Le flux d'un champ vectoriel permet de comprendre comment cela "se diffuse" dans l'espace et il est défini en analyse vectorielle de la façon suivante :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

qui donne le flux du champ électrique \vec{E} à travers une surface S .

Considérons le flux d'une charge ponctuelle q à travers une surface très proche de la charge, mais qui ne la contient pas. Choisissons cette surface avec les parois latéraux selon la direction radiale des lignes de champ de la charge. Les surface latéraux sont ainsi parallèles au champs et ne contribuent donc pas au flux. Le flux à travers la surface 1 est donc :

$$\Phi_{S_1}(\vec{E}) = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2} r_1^2 d\Omega = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

car la surface 1 est le produit $r_1^2 d\Omega$, où $d\Omega$ est l'angle solide sous-tendu par la surface S_1 . Le signe moins est justifié par le fait que le flux est opposé à la normale à la surface, qui est sortante par définition.

Le raisonnement est identique pour la surface 2 :

$$\Phi_{S_2}(\vec{E}) = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2^2} r_2^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

sauf qu'ici le signe positif se justifie par le fait que le champ est dans la même direction de la normale à la surface. Nous pouvons donc en déduire que pour n'importe quelle surface :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

si la surface ne contient aucune charge à l'intérieur.

Si les deux surfaces S_1 et S_2 ne sont pas orthogonales au champ le résultat ne change pas, car si d'un côté la surface augmente d'un facteur $1/\cos\theta$ le champ quant à lui décroît d'un facteur $\cos\theta$ (qui correspond en fait à la composante normale à la surface). Le produit $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ reste donc le même.

S'il y a une charge à l'intérieur de la surface, son flux ne sera pas nul. Imaginons une surface S' intérieure à S qui coupe une sphère. Le flux à travers de la surface $S - S'$ est nul parce qu'il n'y a pas de charge à son intérieur et comme cette conclusion ne dépend pas de la forme de la surface nous pouvons choisir cette surface comme étant une sphère concentrique avec la charge et ayant un rayon r .

Le flux à travers S' n'est cependant pas nul, car le champ électrique à sa surface est :

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

et il est dirigé vers l'intérieur de la surface (en direction opposée à la normale) et ne dépend pas de la surface choisie. Puisque la surface S' peut être réduite jusqu'à un voisinage infinitésimal de la charge q nous pouvons déduire que le flux à travers la surface contenant la charge q s'écrit :

$$\Phi_S(\vec{E}) = E(r)S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Le flux du champ électrique à travers une surface S s'écrit donc :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \begin{cases} 0 & \text{charges à l'extérieur de la surface } S \\ \frac{q}{\epsilon_0} & \text{charges à l'intérieur de la surface } S \end{cases}$$

À partir des propriétés de linéarité additive (vectorielle) du champ électrique et des intégrales² il s'ensuit immédiatement que le flux du champ électrique à travers une surface est égal à la somme des charges présentes à l'intérieur divisée par la constante diélectrique. L'extension au cas des distributions de charges continues est immédiate si on tient compte du fait que $Q = \int \rho dV$. Donc :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{interne}}}{\epsilon_0} \quad (1.7)$$

Là où la relation de la circulation (1.6) est valide pour tous les champs radiaux, la (1.7) n'est valide que pour les champs qui décroissent comme $1/r^2$. Les deux relations définissent complètement le champ électrique.

La loi de Coulomb à partir de la loi de Gauss

La loi de Gauss est parfaitement équivalente à la loi de Coulomb. Sous des hypothèses très générales, il est possible de démontrer que la loi de Gauss implique la loi de Coulomb.

Considérons donc une charge ponctuelle Q . Nous supposons que le champ électrique soit radiale et ayant une symétrie sphérique, ce qui est une hypothèse tout à fait raisonnable. Considérons comme surface une sphère concentrique avec la charge. Le champ électrique sera donc partout normale à la surface et sa valeur constante :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E dS = E \int_S dS = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

d'où :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

ce qui montre l'équivalence des deux lois.

2. Cela intervient dans la définition de flux d'un champ vectoriel.

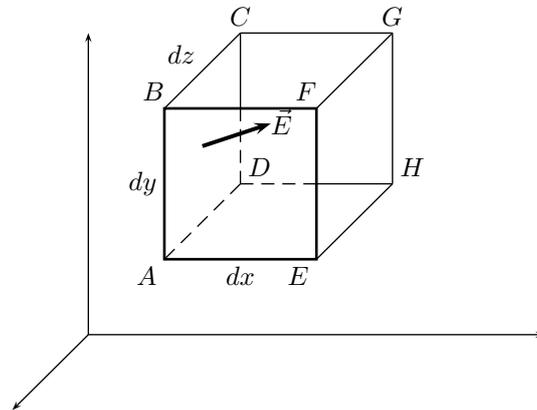
1.2.4 Forme locale

Les relations obtenues jusqu'à présent sont de nature intégrale, c'est-à-dire qu'elles concernent le champ électrique calculé dans certaines régions de l'espace (valeurs sur la surface S) avec des charges ou des densités calculé en d'autres points de l'espace (à l'intérieur de la surface).

Il est également utile d'avoir une forme locale, c'est-à-dire de calculer des quantités au même point de l'espace. La généralisation au cas non stationnaire, où les variables dépendent du temps, en cas de formulation intégrale demandera de relier des quantités calculés en différents points et obligera donc à prendre en compte la vitesse de propagation du signaux physiques. Au lieu de cela une formulation locale, en liant des quantités calculées au même point, se prête plus facilement à une généralisation dans le cas non stationnaire.

La forme locale est également utile d'un point de vue strictement de calcul.

La relation (1.7) peut être mise en forme locale via le théorème flux-divergence, dont la démonstration est assez simple et intéressante pour être brièvement rapportée ici.³ Considérons un champ électrique $\vec{E}(x, y, z)$ dans un domaine spatial sur lequel il est dérivable par rapport à chacune des trois composantes. Afin de simplifier, considérons comme surface de Gauss un cube de dimensions dx, dy, dz et calculons le flux sortant de ce volume.



Commençons par considérer le flux le long de l'axe x . En indiquant avec \bar{y} et \bar{z} la valeur moyenne respectivement sur la face y et z , le flux à travers les deux faces $ABCD$ et $EFGH$ s'écrit :

$$d\Phi_{ABCD} = \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E_x(x, \bar{y}, \bar{z}) dy dz$$

$$d\Phi_{EFGH} = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_x(x + dx, \bar{y}, \bar{z}) dy dz$$

Le flux net sortant du volume le long la direction x est :

$$d\Phi_{EFGH} + d\Phi_{ABCD} = [E_x(x + dx, \bar{y}, \bar{z}) - E_x(x, \bar{y}, \bar{z})] dy dz = \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} dV$$

Un raisonnement parfaitement identique peut être fait le long les directions y et z , nous trouvons ainsi pour le flux totale :

$$d\Phi = \left(\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} \right) dV$$

la quantité entre parenthèses est la *divergence* du vecteur $\vec{E}(x, y, z)$, en utilisant la notation "nabla" :

$$d\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

3. La démonstration sera explicitement formulée pour champ électrique, mais elle est valide évidemment pour tous champs vectoriels dérivables dans le domaine spatial considéré. Les détails techniques sont laissés aux cours de mathématiques.

Le flux total s'obtient en intégrant sur le volume \mathcal{V} et de la définition de flux s'ensuit la relation (*théorème de flux-divergence*) :

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\mathcal{V}$$

et pour la loi de Gauss (1.7) nous avons :

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\mathcal{V} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \varrho(x, y, z) d\mathcal{V} \Rightarrow \int_{\mathcal{V}} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\varrho(x, y, z)}{\varepsilon_0} \right] d\mathcal{V} = 0$$

puisqu'il doit valoir pour n'importe quel volume :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(x, y, z)} \quad (1.8)$$

Cette relation est l'*équation de Maxwell-Gauss* et elle est équivalente à la loi de Gauss (et donc à la dépendance de l'inverse du carré de la distance de la loi de Coulomb) avec la seule hypothèse que le théorème flux-divergence soit valide. Cette hypothèse, rappelons-le, exige que le champ vectoriel soit dérivable sur tout le domaine considéré, ce qui n'était pas nécessaire pour la formulation intégrale de cette loi.

Remarquons-nous que souvent dans la pratique nous avons à faire à des distributions discontinues, par exemple sur les surfaces des conducteurs où le champ, tout en étant continu, est non différentiable.⁴ La loi différentielle nouvellement obtenue peut cependant être appliquée dans chacun des domaines où le champ est dérivable.

La relation (1.6) peut être mise en forme locale via le *théorème de Kelvin-Stokes*. Ce théorème relie le rotationnel d'un champ de vecteurs calculé sur une surface avec l'intégral curviligne calculée sur le bord de la surface. Puisque le bord est une ligne fermée, l'intégral curviligne sur le bord coïncide avec la circulation du champ vectoriel calculée sur le bord de la surface. Dans le cas du champ électrique \vec{E} , le théorème nous dit que (nous utilisons toujours la notation "nabla" ici) :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

puisque cette relation est valide indépendamment de la surface choisie, le théorème nous permet de conclure que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

En utilisant l'identité vectorielle $\vec{\nabla} \times (\nabla \vec{F}) \equiv 0$, où \vec{F} est un champ de vecteurs, du théorème de Kelvin-Stokes s'ensuit que le champ électrique \vec{E} peut être écrit comme étant le gradient d'une fonction scalaire. Ce résultat avait déjà été trouvé en raisonnant sur la signification de la circulation dans un champ à symétrie radiale. La structure mathématique que nous sommes en train de développer est donc cohérente.

La relation :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0} \quad (1.9)$$

s'appelle *équation de Maxwell-Faraday en régime stationnaire* et décrit en forme locale le fait que le champ électrique est radiale.

Nous remarquons bien ici qu'il s'agit de l'équation en régime stationnaire, car en régime non stationnaire nous aurons un terme provenant du champ magnétique qui rendra le champ électrique à rotationnel non nul.

1.3 Champs électrique de quelques systèmes de charges

Dans cette section, nous verrons comment il est possible d'exploiter le théorème de Gauss pour calculer simplement le champ électrique généré par certaines configurations de charge particulières. Cependant, la simplicité d'application du théorème de Gauss ne doit pas tromper. Le théorème de Gauss est très utile en cas de symétries spéciales mais pas en présence de configurations complexes de charges.

4. C'est parce que dans ces cas le champ électrique présente des points anguleux.

Ces configurations peuvent naturellement être résolues simplement par intégration directe, mais nous préférons utiliser ici une approche plus "raisonnée" afin de montrer comment les principes de base peuvent être appliquées à des cas concrets.

1.3.1 Points d'équilibre dans un champ électrostatique

La première question à se poser est de savoir si une configuration d'équilibre stable est possible dans un champ électrostatique.

La réponse est non. En effet, dire que le point P_0 est un point d'équilibre stable pour le champ électrostatique généré par une certaine configuration de charge signifie deux choses :

- le champ électrique en P_0 doit être nul (être un point d'équilibre)
- le champ électrique en tout point proche de P_0 doit pointer vers P_0 , car pour chaque déplacement d'une charge le champ doit être tel qu'il ramène la charge vers P_0 .

Mais si on considère une surface S incluant P_0 , l'intégral du champ électrique sur cette surface ne peut pas être nul car le champ est toujours dirigé vers l'intérieur de S . S'il n'y a pas de charge au point d'équilibre P_0 alors le théorème de Gauss est violé, P_0 ne peut donc pas être un point d'équilibre.

Par rigueur logique, il serait possible d'avoir une distribution de charge dans S telle que P_0 soit un point d'équilibre. Mais cette distribution de charges doit être maintenue en position par des forces autres qu'électriques (mécaniques, par exemple), par conséquent une position d'équilibre doit être garantie par des forces électriques **et** mécaniques.

1.3.2 Fil infini chargé

Considérons un fil infini chargé dont la densité de charge linéaire soit λ .

Compte tenu de la symétrie du problème, supposons que le champ soit dirigé radialement vers le fil, car pour chaque contribution de charge le long du fil dans une direction, il y aura une contribution égale dans la direction opposée. Dans ce cas, le champ ne peut que être radial.

Considérons ensuite une surface cylindrique de Gauss de rayon r coaxiale au fil et de longueur unitaire. Le champ étant radial, la contribution au flux provenant des deux bases du cylindre est nulle, tandis que le champ \vec{E} est perpendiculaire à la surface latérale du cylindre et donc le flux est égal au produit de E pour la surface du cylindre :

$$2\pi r E = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (1.10)$$

le champ électrique diminue dans ce cas de façon inversement proportionnelle à la distance r .

1.3.3 Plan infini uniformément chargé

Considérons maintenant un plan infini uniformément chargé ayant densité de charge superficielle σ . S'il n'y a pas d'autres charges, on peut supposer que le champ électrique est normal à la surface et le même de chaque côté de la surface.

Dans ce cas, la surface gaussienne sera un parallélépipède qui coupe la surface. Soit la surface des deux faces parallèles au plan chargé A .

De l'hypothèse que le champ électrique est normal à la surface suit que la contribution au flux des surfaces latérales du parallélépipède est nulle car elles sont parallèles au champ électrique. Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$EA + EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

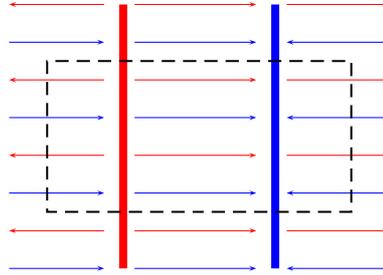
en effet, le champ électrique de deux côtés est dirigé selon la normale sortante de la surface et donc les contributions au flux ont le signe concordant. Il s'ensuit que le champ électrique d'un plan infini ayant densité de charge superficielle σ est :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

comme on peut le voir, dans ce cas le champ est constant dans tout l'espace.

1.3.4 Deux plaques parallèles chargées

Le résultat précédent nous permet de calculer facilement le champ électrique de deux plaques infinies l'une à côté de l'autre ayant densité de charge opposée σ et $-\sigma$.



Comme vu dans le cas précédent, si la densité est σ le champ est normal à la surface et *sortant* (concorde à la normale, représentée ici en rouge). Dans le cas de densité de charge $-\sigma$ le champ est toujours perpendiculaire à la surface, mais cette fois-ci est discordant par rapport à la normale, puisque *entrant* (en bleu). En conséquence, dans la région entre les deux plaques le champ est la somme (la contribution sortant de la surface σ s'ajoute à la contribution entrant dans la surface $-\sigma$), tandis qu'à l'extérieur les deux contributions s'annulent exactement car le champ généré par une plaque est constant. Le fait que le champ extérieur est égal à zéro peut être déduit directement du théorème de Gauss en choisissant un parallélépipède qui entoure les deux surfaces. Le champ est alors nul car les charges internes à la surface sont nulles (les charges positives d'une plaque sont annulées par les charges négatives de l'autre plaque).

Il s'ensuit donc :

$$E = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} & \text{all'interno} \\ 0 & \text{all'esterno} \end{cases} \quad (1.11)$$

1.3.5 Sphère uniformément chargée en volume

Supposons maintenant une sphère uniformément chargée de rayon R , densité de charge ρ et charge totale Q . Ici, nous devons distinguer deux cas : $r < R$ et $r > R$.

Dans le cas $r > R$, considérons la surface de Gauss comme une sphère concentrique avec notre sphère chargée. Pour la symétrie du problème, le champ électrique doit être radial et donc perpendiculaire en chaque point à la surface de Gauss. Il s'ensuit que le théorème de Gauss s'écrit :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Si par contre $r < R$, nous sommes à l'intérieur de la sphère donc la charge incluse par la surface de Gauss est $4/3\pi r^3 \rho$, d'où le théorème de Gauss :

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

et donc :

$$E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} & \text{Champs externe} \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r & \text{Champs interne} \end{cases} \quad (1.12)$$

Comme vous pouvez le voir, en dehors de la sphère le champ électrique est identique à celui d'une charge ponctuelle située au centre de la sphère. Le champ électrique dans la sphère croît linéairement avec le rayon de la sphère. Tenant compte du fait que $\rho = 3Q/4\pi\varepsilon_0 R^3$ il est simple de vérifier que les deux solutions coïncident à $r = R$, qui représente cependant un point anguleux pour le champ électrique.

1.4 Le dipôle électrostatique

Considérons deux charges électriques opposées q et $-q$ séparées par une distance d . Ce système de charge prend le nom de *dipôle électrostatique* et il est extrêmement important.

Supposons que le centre du dipôle soit aussi l'origine de notre référentiel et que le dipôle soit orienté selon l'axe z . Cela signifie que les coordonnées des deux charges seront $q = (0, 0, d/2)$ et $-q = (0, 0, -d/2)$.

En se basant sur le principe de superposition, le potentiel d'un point générique $P = (x, y, z)$ dû à notre dipôle sera :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{[z - d/2]^2 + y^2 + x^2}} + \frac{-q}{\sqrt{[z + d/2]^2 + y^2 + x^2}} \right]$$

Nous nous intéressons ici au comportement du potentiel (et donc du champ électrique) lorsque la distance entre les deux charges tend à zéro ou, en d'autres termes, lorsque nous sommes très loin du dipôle. Dans ce cas, nous pouvons développer le potentiel en développement limité à l'ordre 2 en d . La première approximation possible (en négligeant les termes des puissances supérieures en d) est donc :

$$\left(z \mp \frac{d}{2} \right)^2 \simeq z^2 \mp zd$$

d'où :

$$[z \mp d/2]^2 + y^2 + x^2 \simeq r^2 \mp zd = r^2 \left(1 \mp \frac{zd}{r^2} \right)$$

et où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Il s'ensuit :

$$\frac{1}{\sqrt{[z \mp d/2]^2 + y^2 + x^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{r^2 \left(1 \mp \frac{zd}{r^2} \right)}} = \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{zd}{r^2} \right)^{-1/2}$$

le terme $\left(1 \mp \frac{zd}{r^2} \right)^{-1/2}$ peut lui aussi être développé, en ne prenant que le terme linéaire en d nous avons :

$$\frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{zd}{r^2} \right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2} \right)$$

donc dans les approximations faites le potentiel du dipôle s'écrit :

$$V(x, y, z) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2} \right) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zqd}{r^3} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{r^3}$$

où nous avons défini l'entité *moment dipolaire électrique des deux charges* $p \equiv qd$.

Remarquons maintenant que l'entité z/r représente le cosinus de l'angle θ entre l'axe dipolaire et la direction du point (x, y, z) , de sorte que le potentiel dipolaire peut être réécrit dans la forme (nous omettons ici le signe d'approximation, il est clair maintenant que nous discutons du potentiel à une distance très supérieure à d) :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2}$$

Il est tout à fait naturel maintenant d'introduire un *vecteur de dipôle* \vec{p} défini comme *le vecteur ayant le module égale au produit de la charge fois la distance d entre les deux charges et orienté de la charge négative à la charge positive*. De cette façon, le terme $p \cos \theta$ devient le produit scalaire du dipôle électrostatique et le vecteur unitaire \hat{e}_r pointant dans la direction (x, y, z) , $p \cos \theta = \vec{p} \cdot \hat{e}_r$. En utilisant cette notation, le potentiel du dipôle peut être écrit sous la forme :

$$\boxed{V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}} \quad (1.13)$$

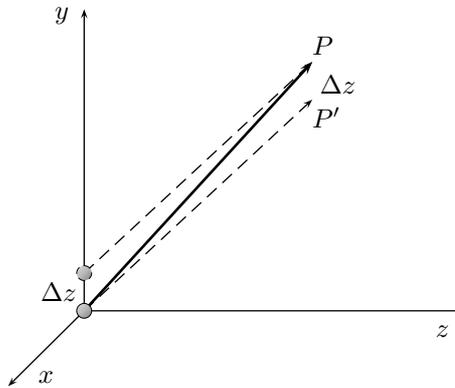
Il est intéressant de remarquer que la composante \hat{e}_r/r^2 du potentiel correspond à celle du champ électrique d'une charge ponctuelle, qui admet un potentiel de forme $\vec{\nabla}(1/r)$. Cela nous permet d'écrire le potentiel d'un dipôle électrostatique sous une autre forme, à savoir :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (1.14)$$

Il y a une signification physique pour écrire le potentiel du dipôle sous cette forme, et c'est le principe de superposition.

Le potentiel en $P(x, y, z)$ d'une charge dans l'origine est donné par $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$. De quel quantité change le potentiel si on déplace la charge en $(0, 0, \Delta z)$? Il change de la même quantité dont changerait le potentiel en $P' = (x, y, z - \Delta z)$ si on laissait la charge en $(0, 0, 0)$. Mais cette variation s'écrit :

$$\Delta V = -\frac{\partial V}{\partial z} \Delta z$$



Dans le cas d'un dipôle, V est le potentiel d'une charge ponctuelle et $\Delta z = d/2$, par conséquent la contribution au potentiel apportée par la charge positive est :

$$V_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q}{r} \right) \left(\frac{d}{2} \right) \right]$$

et de façon similaire pour la charge négative :

$$V_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-q}{r} \right) \left(\frac{d}{2} \right) \right]$$

Pour le principe de superposition, le potentiel totale du dipôle s'écrit donc :

$$V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q}{r} \right) \left(\frac{d}{2} \right) + \frac{-q}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-q}{r} \right) \left(\frac{d}{2} \right) \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) qd$$

Le raisonnement peut être appliquée à chaque direction, on arrive ainsi à la formule (1.14) pour le potentiel d'un dipôle électrostatique.

1.4.1 Actions mécaniques sur un dipôle électrique

Un dipôle électrostatique placé dans un champ électrique est soumis évidemment à des forces mécaniques car le champ électrique a tendance à déplacer les charges. Comme pour tous systèmes rigides (car nous considérerons le dipôle électrostatique un corps rigide), les actions mécaniques sont entièrement décrites lors que nous avons trouvés la résultante et le moment résultant.

Considérons un dipôle placé dans un champ électrique E dont le potentiel est V . Si on se rappelle que le potentiel représente l'énergie potentielle par unité de charge et que le potentiel bénéficie de l'additivité linéaire, il est facile de déduire que l'énergie potentielle du dipôle peut être exprimée comme suit :

$$U = U_- + U_+ = -qV(\vec{r}) + qV(\vec{r} + \vec{d})$$

où nous avons indiqué avec \vec{d} le vecteur distance des deux charges constituant le dipôle. Puisque $V(\vec{r} + \vec{d}) = V(\vec{r}) + dV$, s'ensuit :

$$U = q \cdot dV = q \cdot \vec{\nabla}V \cdot \vec{d} = \vec{\nabla}V \cdot (q\vec{d}) = -\vec{E} \cdot \vec{p}$$

ceci est la relation qui représente l'énergie d'un dipôle placé dans un champs électrique \vec{E} .

Le travail dL reçu par n'importe quel système peut être décomposé en une partie due à la résultante et une partie due au moment résultant :

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{dl} + \vec{M} \cdot \vec{d\theta}$$

D'autre part, le travail reçu peut s'écrire aussi en terme de variation d'énergie potentielle changé de signe, à savoir :

$$-dL = dU = \frac{\partial U}{\partial l} dl + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta$$

Ici le premier terme représente la dérivée directionnelle de U le long dl et le deuxième terme la dérivée de U par rapport à l'angle θ .

Par comparaison directe, il s'ensuit immédiatement :

$$\begin{cases} \vec{F} \cdot \vec{dl} = -\frac{\partial U}{\partial l} dl \\ \vec{M} \cdot \vec{d\theta} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta \end{cases} \quad (1.15)$$

Or, dans la relation $U = -\vec{E} \cdot \vec{p} = -Ep \cos \theta$ la dépendance de la position n'est contenu que dans le champ électrique \vec{E} , par contre la dépendance de l'angle n'apparaît que par le facteur $\cos \theta$. Il s'ensuit :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial l} dl = (dU)_{\theta=\text{const.}} = \vec{\nabla}U \cdot \vec{dl} = -\vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{dl} \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta = -\frac{\partial}{\partial \theta}(Ep \cos \theta) d\theta = Ep \sin \theta = (\vec{E} \times \vec{p}) \cdot \vec{d\theta} \end{cases}$$

Par comparaison directe avec les (1.15) nous trouvons les équations :

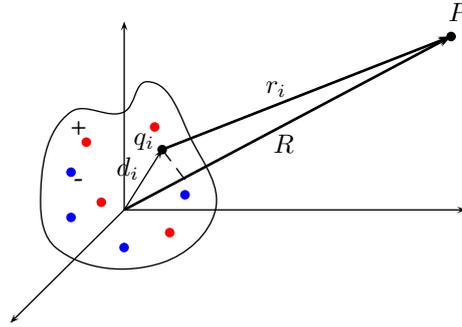
$$\boxed{\begin{cases} \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{p}) \\ \vec{M} = -(\vec{E} \times \vec{p}) = (\vec{p} \times \vec{E}) \end{cases}} \quad (1.16)$$

Il est évident de ces équations que la résultante agissant sur le dipôle n'est différente de zéro que si le champ électrique \vec{E} n'est pas uniforme en au moins une coordonnée. Sinon, la seule force agissant sur le dipôle est un couple ayant moment $\vec{p} \times \vec{E}$. *Dans un champ électrique uniforme, un dipôle se met en rotation jusqu'à s'aligner avec la champ.*

1.5 Développement multipolaire

Nous avons affirmé précédemment que le dipôle électrique est un système extrêmement important. Dans cette section, nous montrerons pourquoi.

Supposons d'avoir une distribution de charge complexe, par exemple une molécule. Nous nous posons la question de trouver la forme du champ électrique généré par cette distribution de charge à une distance très supérieure aux dimensions linéaires de l'objet.



Cet objet peut être considéré, du moins en première approximation, constitué de nombreuses charges élémentaires q_i confinées dans une région limitée de l'espace,⁵ chacune à une distance d_i de l'origine de notre système référentiel. Nous cherchons le potentiel généré par l'objet en un point P à distance $R \gg d_i$.

Grâce au principe de superposition, le potentiel généré en P par la distribution de charges s'écrit :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^N \frac{q_i}{r_i}$$

où r_i est la distance de P des charges q_i . Si la distance R est beaucoup plus grande que d_i , alors on peut raisonnablement approximer chaque r_i avec R qui, sorti de la sommation, fournit :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \sum_i^N q_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

où Q est la charge totale.

Pour des distances très supérieures à celles caractérisant la distribution de charges, cette dernière apparaît comme une charge ponctuelle de valeur Q égale à la charge globale de la distribution. Ce n'est pas surprenant, car toute distribution vue d'une distance suffisamment grande apparaît comme un point.

Pendant, en général dans la matière ordinaire les charges positives sont équilibrées par un nombre équivalent de charges négatives et elle est donc électriquement neutre. Dans ce cas, l'approximation faite $R \approx r_i$ est trop forte et il faut aller à un degré d'approximation supérieure.

Pour ce faire, il faut remarquer qu'en fait pour $R \gg r_i$, r_i peut être mieux approximé si l'on considère que R diffère de r_i pour la projection de \vec{d}_i sur \vec{R} , c'est-à-dire en indiquant avec \hat{e}_R le vecteur unitaire colinéaire avec \vec{R} :

$$r_i \simeq R - \vec{d}_i \cdot \hat{e}_R$$

En tenant compte que $\vec{d}_i \cdot \hat{e}_R \ll R$, on peut écrire :⁶

$$\frac{1}{r_i} \simeq \frac{1}{R} \left[\frac{1}{1 - \frac{\vec{d}_i \cdot \hat{e}_R}{R}} \right] \simeq \frac{1}{R} \left[1 + \frac{\vec{d}_i \cdot \hat{e}_R}{R} + \frac{3(\vec{d}_i \cdot \hat{e}_R)^2 - |\vec{d}_i|^2}{2R^2} + \dots \right] \quad (1.17)$$

par conséquent, dans cette approximation le potentiel de la distribution de charge s'écrit :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{R} + \sum_i^N q_i \frac{\vec{d}_i \cdot \hat{e}_R}{R^2} + \sum_i^N q_i \frac{3(\vec{d}_i \cdot \hat{e}_R)^2 - |\vec{d}_i|^2}{2R^3} + \dots \right]$$

5. L'extension au cas continu est immédiate, il suffit de considérer un densité ρdV au lieu des q_i

6. Le terme à droite provient de l'expansion en série de Taylor du terme $1/\left[1 - \frac{\vec{d}_i \cdot \hat{e}_R}{R}\right]$

Au potentiel de la charge ponctuelle, nous ajoutons donc un premier terme qui a la même dépendance de R qu'un dipôle, en fait ce terme est formellement identique au potentiel d'un dipôle électrique. On peut donc définir un vecteur $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{d}_i$ qui sera appelé *moment de dipôle électrostatique de la distribution de charge*.

En ce qui concerne le deuxième terme supplémentaire en $1/R^3$, celui-ci a la même forme qu'un système de 4 charges équidistantes avec des charges opposées deux à deux⁷ (*quadripôle fondamentale*). Cet objet est en fait un tenseur dont les composants s'écrivent $Q_{ij} = \sum_{n=1}^N q_n (3x_i x_j - \delta_{ij})$, ce qui représente une forme quadratique positive. Cet objet s'écrit :

$$Q^{(4)} = \hat{e}_R^T Q \hat{e}_R = \sum_{i,j} Q_{ij} \hat{e}_R^i \hat{e}_R^j$$

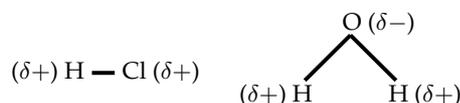
est il est appelé *tenseur quadrupolaire*. Le potentiel peut donc être réécrit sous la forme :

$$V = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}}_{\text{charge ponctuelle}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{e}_R}{R^2}}_{\text{terme dipolaire}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \frac{Q_{ij} \hat{e}_R^i \hat{e}_R^j}{2R^3}}_{\text{terme quadrupolaire}} + \dots$$

Le terme dipolaire diminue plus rapidement que le potentiel d'une charge ponctuelle, mais si la distribution de charge est électriquement neutre, c'est le seul terme (ou le terme prédominant) qui sera ressenti à de grandes distances.

Le dipôle moléculaire

Un cas remarquable de l'application de ce résultat est celui des molécules. Les molécules dans leur état fondamental sont électriquement neutres, mais la distribution spatiale des charges est généralement de nature à créer un moment dipolaire. C'est le cas des molécules ioniques, mais aussi de celles covalentes non symétriques, tel que le chlorure d'hydrogène ou l'eau :



dans ces cas, l'interaction entre les molécules (et de celles-ci avec le champ électrique) est essentiellement de nature dipolaire et ceux-ci sont appelées *dipôles permanents*. Dans la plupart des cas, cette description est suffisamment précise.

Même en cas de molécules symétriques sans moment dipolaire (par exemple, Cl_2 ou CO_2), il peut arriver qu'en raison d'interactions externes (champ électrique ou interaction avec d'autres molécules polaires) la distribution des charges normalement symétrique se déforme de manière à avoir une légère accumulation de charges positives d'un côté et négatives de l'autre : dans ce cas, on parle de *dipôle induit*.

Enfin, même en cas d'atomes ou de molécules parfaitement symétriques, la distribution de la charge négative dans le nuage électronique n'est pas uniforme dans le temps, même si elle l'est en moyenne. Dans ce cas, nous parlerons de *dipôles instantanés*.

Bien que relativement faibles, les interactions entre ces types de dipôles sont à l'origine des forces de Van der Waals. En particulier, les interactions entre dipôles instantanés constituent l'interaction principale des molécules non polaires et sont responsables de la liquéfaction des gaz rares.

L'expansion de Taylor de l'équation (1.17) peut être poursuivie si plus de précision est recherchée.

7. En fait, quatre charges dont les barycentres des charges positives et des charges négatives sont confondus.

Conducteurs et champs électrostatique

2.1 Distribution des charges dans le conducteurs

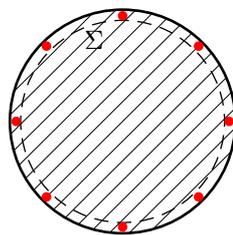
Nous ouvrirons ce chapitre en donnant la définition de *conducteur* à laquelle nous nous référons par la suite.

Nous définissons **conducteur**, *un solide indéformable à l'intérieur duquel les électrons sont libres de se déplacer, électrons qui se déplaceront réellement s'ils sont soumis à une force externe (champ électrique).*

2.1.1 Champ électrostatique et distributions de charges

En électrostatique, nous considérons toujours des quantités constantes dans le temps ou statiques. Si vous immergez un conducteur dans un champ électrique,¹ les charges vont commencer à se déplacer sous l'action du champ jusqu'à atteindre une configuration telle d'annuler le champ électrique à l'intérieur du conducteur. Concrètement, puisque les charges sont libres de se déplacer dans le conducteur la seule façon d'être en régime statique est que le champ électrique à l'intérieur du conducteur soit nul. *En électrostatique, le champ électrique à l'intérieur des conducteurs est nul et donc les conducteurs représentent des surfaces équipotentiellles.*

Puisque le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul, le théorème de Gauss (1.7) appliqué à n'importe quelle surface Σ à l'intérieur du conducteur permet d'établir que la charge à l'intérieur de la surface sélectionnée est nulle. Mais la surface est arbitraire, donc *toutes les charges éventuellement présentes dans un conducteur sont disposées à sa surface.*

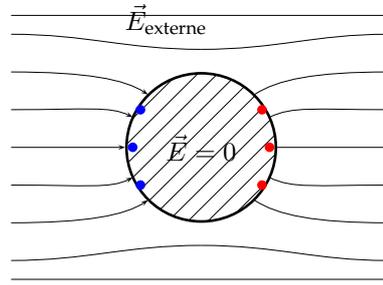


Par conséquent, ce qui se passe en pratique est que si nous immergeons le conducteur dans un champ électrique, les charges libres se déplaceront sous l'action du champ électrique jusqu'à ce qu'elles atteignent la surface du conducteur d'où elle ne pourront pas sortir.² Lors qu'elles sont à la surface, elles se distribueront de façon telle à créer un contre-champ électrique qui annule le

1. Constante parce que nous sommes en régime électrostatiques. Un champ variable génère toute une autre série de phénomènes, que nous traiterons plus avant.

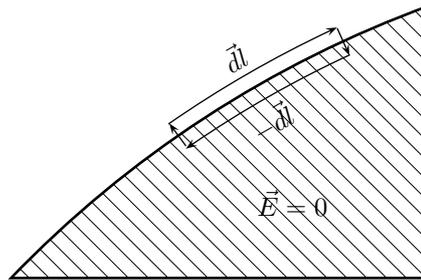
2. Pour extraire les charges du conducteur il est nécessaire de faire un travail contre les forces qui les empêchent de sortir du conducteur, appelé *travail d'extraction*.

champ existant à l'intérieur du conducteur. Le champ électrique à l'intérieur du conducteur est donc nul et il n'y a plus de mouvement de charges.



Le temps de redistribution des charges est très court (environ 10^{-19} s) et les charges sont réparties sur une épaisseur de 1-2 Ångstrom.

Il est également facile de déduire que le champ électrique près de la surface doit être perpendiculaire à celle-ci. S'il existait une composante tangentielle, les charges pourraient encore se déplacer le long de la surface, mais nous ne serions plus en régime électrostatique. Donc *en champ électrostatique, près d'un conducteur le champ est normal à la surface*. Ce résultat peut être trouvé analytiquement en calculant la circulation le long du chemin montré sur la figure.



Si les segments normaux à la surface de séparation sont infinitésimaux d'ordre supérieur à dl (ce qui arrive dans la limite de ces segments tendant à zéro), alors la circulation du champ électrique calculé le long du chemin montré est :

$$\vec{E}_{ext} \cdot d\vec{l} - \vec{E}_{int} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{ext}^t dl - E_{int}^t dl = 0$$

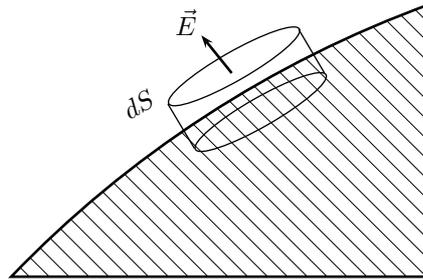
où E^t est la composante tangentielle à la surface de séparation. De cette relation s'ensuit :

$$E_{ext}^t = E_{int}^t$$

à savoir que *la composante tangentielle du champ électrique ne peut pas subir de discontinuité en passant d'un milieu à un autre*. Dans le cas particulier où le matériel est un conducteur, il en résulte immédiatement que *la composante tangentielle du champ électrique à la surface extérieure du conducteur est nulle, donc le champ est normale à la surface*.

La composante normal à la surface de séparation peut au contraire varier et ceci est évident dans le cas d'un conducteur. Dans ce cas, en effet, la composante normale passe de la valeur 0 à l'intérieur du conducteur à la valeur non nulle qu'elle a à l'extérieur. La transition entre les deux valeurs se fait directement sur la surface où, comme nous l'avons vu, les charges électriques sont concentrées.

Grâce au théorème de Gauss, nous pouvons calculer la valeur de la densité de charge à la surface d'un conducteur. Soit Q la charge totale sur le conducteur et σ sa densité superficielle. Considérons comme surface gaussienne un cylindre à moitié à l'intérieur de la surface conductrice.



Puisque le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul et les surfaces parallèles aux lignes de champs ne contribuent pas au flux, le théorème de Gauss s'écrit :

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

car la portion de charge interceptée par le cylindre est σdS . Il s'ensuit que le champ électrique est :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (2.1)$$

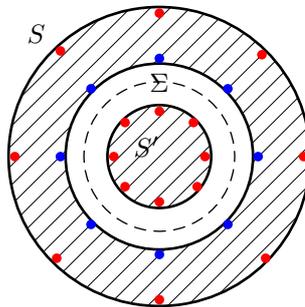
ayant indiqué \hat{n} la normale à la surface. Remarquons que dans §1.3.3 nous avons trouvé pour le champ d'un plan chargé la valeur $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$. Pourquoi le champ créé par la surface d'un plan chargé est la moitié de celle produite par un conducteur, même dans la limite où la surface peut être considérée comme étant un plan? La réponse est qu'ici nous n'avons pas précisé qu'il n'y a pas d'autres charges autour. En fait afin d'assurer la condition $E = 0$ à l'intérieur du conducteur d'autres charges doivent exister.

La surface du conducteur génère en fait un champ $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, mais les autres charges du conducteur sont disposées de telle sorte qu'à l'intérieur du conducteur il y a un champ $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, qui annule le champ $-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ créé par la surface du conducteur. Ce champ s'ajoute à l'extérieur en contribuant pour $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Il est possible de déduire trois phénomènes à partir des caractéristiques du champ électrostatique, des phénomènes d'une importance pratique considérable.

INFLUENCE TOTALE ÉLECTROSTATIQUE

Considérons un conducteur creux S à l'intérieur duquel nous plaçons un conducteur S' ayant une charge Q .



Considérons une surface Σ fermée à l'intérieur du conducteur creux S . Puisque le champ électrique en S est nul, le flux est nul et donc en est autant pour la charge. Mais la surface Σ peut être prise arbitrairement près de la surface interne de la cavité, par conséquent sur la surface interne du conducteur doit être présent (par "influence" électrostatique) une charge égale à $-Q$.

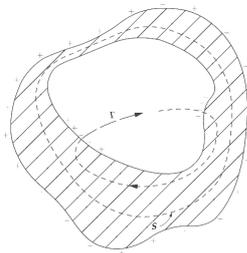
La surface Σ peut également être prise arbitrairement près de la surface extérieure du conducteur S . Étant ceci électriquement neutre une charge Q doit donc être présente sur la surface externe.

La charge Q sur le conducteur interne se présente donc telle quelle sur le conducteur externe, qui n'est pas capable de la cacher. Ce phénomène est appelé *influence totale électrostatique*.

Si le conducteur externe est *mis à terre*, c'est-à-dire il est connecté avec un très grand conducteur capable d'absorber un grand nombre de charges sans varier son potentiel (par exemple la Terre), les charges positives du conducteur S pourront migrer vers celui-ci (et de la sphère on dit qu'elle se "décharge"). Dans ce cas, la charge du conducteur interne ne sera plus visible à l'extérieur et le champ électrique du conducteur intérieur sera caché. Dans ce cas, le conducteur S agit comme un *écran électrostatique*.

ÈCRAN ÉLECTROSTATIQUE

Considérons un conducteur, le champ électrique à l'intérieur est nul comme vu ci-dessus. Si le conducteur est creux, quel est le champ à l'intérieur de la cavité ?



Considérons une zone S à l'intérieur du conducteur. Puisque le champ intérieur est nul, il se localise sur la surface et par conséquent le flux à travers S est aussi nul. Il résulte donc du théorème de Gauss qu'à l'intérieur de la surface S il n'y a pas de charges.

En théorie, il serait possible d'obtenir un nombre égal de charges positives et négatives sur la surface interne de la cavité, de manière à satisfaire le théorème de Gauss et simultanément créer un champ électrique non nul dans la cavité. Cependant, si c'était le cas les charges pourraient se déplacer à l'intérieur du conducteur et s'annuler mutuellement. Ceci peut être démontré analytiquement en utilisant le théorème de la circulation.

Considérons une courbe Γ comme indiqué en figure, qui est en partie contenue dans le conducteur. L'intégrale le long de la ligne Γ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\Gamma = \oint_{\text{conducteur}} \vec{E} \cdot d\Gamma + \oint_{\text{cavité}} \vec{E} \cdot d\Gamma$$

L'intégrale de la partie incluse dans le conducteur est 0 car le champ ici est nul. Si le champ à l'intérieur de la cavité n'était pas nul, la contribution de l'intégrale serait différente de zéro et serait donc :

$$\oint \vec{E} \cdot d\Gamma \neq 0$$

ce qui contredirait le fait que la circulation du champ électrostatique est toujours nulle. Ainsi, *dans une cavité vide à l'intérieur d'un conducteur, le champ électrostatique doit être nul.*

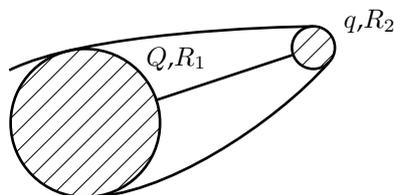
Ces deux cas nous permettent de conclure que *un conducteur – à la limite en forme de cage (cage de Faraday) – qui est mis à terre agit comme un bouclier électrostatique, isolant de l'extérieur tout ce qui se passe dans la cavité interne.*

EFFET DE POINTE

Nous discuterons maintenant du champ électrique autour des pointes d'un conducteur. Dans ce cas le champ électrique autour de la pointe sera très intense, ce qui est intuitif. En effet, dans un

conducteur les charges ont tendance à se déplacer aussi loin que possible de toutes les autres, et la pointe est la partie du conducteur qui est la plus éloignée de tout le reste. Plusieurs charges auront donc tendance à s'accumuler sur la pointe, où (étant la surface réduite) même une petite charge peut produire une densité de charge élevée et donc un champ électrique élevé.

Nous voyons cela analytiquement.



Une pointe peut être représentée schématiquement avec deux sphères de rayon différent reliées par un fil conducteur qui les maintient au même potentiel. La plus grande des sphères a un rayon R_1 et la plus petite R_2 .

La plus grande sphère a une charge Q et un potentiel donné par :³

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_1}$$

de même pour la sphère plus petite, dont la charge soit q :

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_2}$$

puisque $\phi_1 = \phi_2$, il s'ensuit :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_2} \Rightarrow \frac{Q}{R_1} = \frac{q}{R_2}$$

d'autre part nous avons déjà vu que le champ à la surface est proportionnelle à la densité de charge superficielle, qui est quant à elle proportionnelle à la charge totale divisée par le rayon au carré. Nous avons donc :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q/R_1^2}{q/R_2^2} = \frac{R_2}{R_1}$$

le champ électrique est donc inversement proportionnel au rayon des sphères. Puisque le raisonnement peut être appliqué aux sphères oscultrices, on peut en déduire que *le champ électrique est plus intense là où la courbure est mineure*, donc à proximité d'une pointe cela peut devenir très fort, jusqu'à pouvoir provoquer une décharge.

2.1.2 Énergie potentielle électrostatique

Un système de charges électriques agencé de manière à interagir possède une certaine énergie électrostatique d'interaction. Cette énergie est par définition équivalente au *travail effectué par des forces externes pour amener toutes les charges dans la configuration donnée*. Il s'ensuit immédiatement que l'énergie électrostatique peut être positive ou négative : dans le cas de deux charges d'un même signe, le travail doit être fait contre la répulsion électrostatique, la force a le même signe du déplacement et donc l'énergie est positive. Dans le cas de charges de signe opposé, le travail doit être effectué contre l'attraction mutuelle (la force doit retenir les charges électriques), la force a le signe opposé au déplacement et par conséquent l'énergie d'interaction est maintenant négative.

Nous considérerons pour l'instant un système discret de charges ponctuelles.

3. Nous allons ignorer ici la perturbation causée par le fil qui relie les deux sphères. D'autre part, nous sommes dans une approximation assez poussée et nous ne nous intéressons ici qu'à un résultat général.

Le positionnement de la première charge n'implique pas de travail car il n'y a pas de champ électrique. Pour déplacer la deuxième charge, le travail effectué dans le champ créé par la première par la force externe $-q_2 E_1$ s'écrit :

$$L_2 = - \int_{\infty}^{r_{12}} q_2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}}$$

Le travail fait pour déplacer une troisième charge est la somme du travail fait dans le champ électrostatique E_1 créé par la charge q_1 plus le travail fait dans le champ E_2 créé par la charge q_2 (et cela grâce au principe de superposition) :

$$L_3 = - \int_{\infty}^{r_{13}} q_3 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{\infty}^{r_{23}} q_3 \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{23}}$$

L'énergie potentielle électrostatique totale du système des trois charges est donc :

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{23}}$$

Cette relation peut aisément être généralisée. Si nous avons plusieurs charges électriques il faut tenir compte de tous les termes d'interaction entre les charges, donc l'énergie électrostatique d'un système de N charges ponctuelles s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

où le facteur $1/2$ a été introduit car la sommation prend en compte chaque terme d'interaction deux fois. En effet il n'existe aucun moyen simple d'écrire cette sommation en prenant en compte chaque terme qu'une seule fois.

Nous remarquons maintenant que la sommation peut être réécrite de la façon suivante :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right)$$

Le terme entre parenthèse représente le potentiel électrique en i créé par toutes autres charges à l'exception de la charge i elle-même (exclue de la sommation), donc l'énergie électrostatique peut aussi bien s'écrire :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

cette relation peut être immédiatement généralisée au cas d'un distribution continue de charge, en obtenant :⁴

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d\mathcal{V} \quad (2.2)$$

La question que l'on se pose maintenant est où se situe cette énergie électrostatique, si dans les charges, dans l'espace entre les charges ou ailleurs. Le sujet est importante car il est lié à la loi de conservation de l'énergie. Cette loi générale, formulée de cette manière, reste valable même si l'énergie disparaissait à un point et réapparaîtrait dans un autre sans qu'aucun processus n'intervienne entre les deux points. Ce que nous voulons faire ici est d'étendre en quelque sorte le principe de conservation pour formuler une conservation de l'énergie *locale*. Ce que nous entendons ici par *locale* est que l'énergie dans un volume donné ne change que s'il y a un flux qui traverse la surface de ce volume. Il est possible de trouver dans ce cas une formulation beaucoup plus précise et détaillée de la conservation d'énergie. De plus, il arrive qu'en nature l'énergie est effectivement un invariante locale.

4. Bien sûr, on peut écrire des équations similaire pour la densité superficielle et linéaire.

Si nous considérons le champ électrostatique, il n'y a aucun moyen de savoir où l'énergie est réellement présente. Cependant, nous montrerons que l'énergie électrostatique peut être décrite non pas en termes de charges qui la "produisent", mais en termes du champ qu'elles créent. En effet, l'énergie électrostatique est *numériquement* proportionnelle au carré du champ électrique.

Dans l'équation (2.2) la densité de charge peut être écrite par moyen de l'équation de Maxwell-Gauss (1.8)

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V d\mathcal{V}$$

à partir de la relation entre quantités vectorielles :⁵

$$\vec{\nabla} \cdot (V \vec{E}) = (\vec{\nabla} V) \cdot \vec{E} + V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -E^2 + V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

il s'ensuit que $(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})V = \vec{\nabla} \cdot (V \cdot \vec{E}) + E^2$ et par conséquent :

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (V \cdot \vec{E}) d\mathcal{V} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} E^2 d\mathcal{V}$$

grâce au théorème de flux-divergence appliqué au premier membre, nous pouvons réécrire cette relation :

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\mathcal{V} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_S V \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} E^2 d\mathcal{V}$$

Maintenant, nous pouvons évaluer ces intégrales pour un volume tendant à l'infini. Si nous supposons que les charges sont localisées au fini, la contribution de l'intégrale du volume ne changera pas une fois qu'elle inclura toutes les charges au fini. Pour ce qui concerne l'intégrale de surface, en supposant avoir une sphère de rayon R centrée sur l'origine des coordonnées, on sait que le potentiel V décroît comme $1/R$ et le champ électrique comme $1/R^2$.⁽⁶⁾ Puisque la surface de la sphère croît comme R^2 il est immédiat de vérifier que l'intégrale décroît comme $(1/R \cdot 1/R^2)R^2$, à savoir $1/R$. Ainsi, lorsque la surface va à l'infini ($R \rightarrow \infty$), la contribution de l'intégrale de surface tend vers zéro. Par conséquent :

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} E^2 d\mathcal{V} \equiv \int_{\mathcal{V}} \mathcal{U} d\mathcal{V} \quad (2.3)$$

où \mathcal{U} :

$$\boxed{\mathcal{U} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}} \quad (2.4)$$

est la *densité d'énergie du champ électrostatique*. Nous voyons donc que *il est possible de calculer l'énergie électrostatique d'une distribution de charges en calculant l'intégrale d'une densité d'énergie localisée dans le champ*.

Cette formule est important car nous permet de conclure que même une seule charge ponctuelle possède de l'énergie potentielle électrostatique. En effet, en considérant le champ électrique créé par la charge, nous pouvons déduire la relation :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{q^2}{r^4} = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{q^2}{r^4}$$

et si on considère un élément de volume sphérique d'épaisseur dr et surface $4\pi r^2$, l'énergie potentielle électrostatique créé par cette charge et contenue dans l'espace est donnée par l'intégral :

$$U = \int_0^\infty \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} dr = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r=0}^{r=\infty}$$

Le problème de cette intégrale est qu'elle diverge pour $r \rightarrow 0$. En fait, nous sommes partis de l'idée que l'électricité potentielle électrostatique est l'énergie d'interaction entre les différentes charges

5. Cette relation s'ensuit des propriétés des dérivées.

6. En fait, si la charge nette de la distribution est nulle, elle diminuera encore plus vite.

électriques et dans les formules précédentes nous avons n'avons pas pris en compte l'énergie d'interaction de la charge avec elle-même. Par contre, dans la (2.2) nous avons plutôt tenu compte de l'énergie d'interaction de chaque chargé de infinitésimale avec toutes les autres charges et par conséquent, comme dans la (2.3), cette formulation prend également en compte l'énergie qui serait nécessaire pour assembler les charges à partir d'éléments infinitésimaux.⁷

Nous sommes donc obligés de conclure que l'hypothèse selon laquelle l'énergie électrostatique est localisée dans le champ électrostatique est incompatible avec la notion de charge ponctuelle. La solution de ce problème passe nécessairement par le rejet de l'une des hypothèses qui ont été faites pour dériver cette formule, que – rappelons-nous – étaient les suivants :

- L'existence de charges ponctuelles,
- La théorie de l'électricité est valable à toutes les distances,
- conservation d'énergie locale.

La notion de charge ponctuelle et la conservation de l'énergie en forme locale sont bien établies expérimentalement, donc nous sommes obligés d'admettre que la théorie classique de l'électricité n'est plus valide à des distances très petites (et donc il n'est pas licite de faire la limite $r \rightarrow 0$). En fait, la théorie classique de l'électromagnétisme doit être corrigée à petites distances pour prendre en compte les effets quantiques, ce qui donne lieu à une nouvelle théorie dont toutefois le traitement est en dehors du cadre de ce cours.

APPLICATION PRATIQUE DU CONCEPT D'ÉNERGIE POTENTIELLE ÉLECTROSTATIQUE

Nous verrons maintenant comme le simple principe de l'énergie électrostatique peut être appliqué à des cas concrets, permettant nous de calculer des paramètres macroscopiques du système.

Nous allons considérer l'énergie électrostatique du réseau de Bravais du chlorure de sodium. Ce réseau consiste en un alternance d'atomes de chlore et sodium s'attractant mutuellement jusqu'à se toucher. Lors qu'ils se touchent, une force répulsive leur empêche de se rapprocher encore. Nous ferons l'hypothèse simplifiant de considérer les atomes comme étant des sphères rigides dont la distance, mesurée par des moyens spectroscopiques, est d'environ 2.81 Å.

La question que nous nous posons est la suivante : combien d'énergie faut-il fournir au système pour qu'il se dissocie complètement en ions? Par définition cette énergie est équivalente à la chaleur de vaporisation, mais elle est aussi égal à l'énergie électrostatique contenue dans le réseau de Bravais.⁸ Cette valeur a été mesurée être 8.07 eV par molécule.

Nous allons donc calculer l'énergie d'interaction électrostatique d'un ion avec tous les autres. Puisque nous sommes intéressé par l'énergie par molécule, nous n'aurons pas besoin du facteur $1/2$.⁹

L'énergie d'interaction entre un ion et ses proches s'écrit en tenant compte que la charge d'un ion correspond à la charge élémentaire e :

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} = \frac{1}{12.56 \cdot 8.85 \times 10^{-12}} \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{2.81 \times 10^{-10}} \approx 8.21 \times 10^{-19} \text{ J} \simeq 5.12 \text{ eV}$$

Comme nous pouvons le constater, l'ordre de grandeur est déjà correct.

Prenons maintenant comme référence un atome de sodium (chargé positivement) et considérons tous les atomes proches à droite et à gauche le long une ligne horizontale. La contribution à l'énergie électrostatique par cette ligne est :

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} \left(-\frac{2}{1} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \mp \dots \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$$

7. Il convient de noter d'ailleurs que là où l'énergie d'interaction peut être positive ou négative, les relations (2.2) et (2.3) sont toujours positives.

8. Car c'est exactement l'énergie requise pour former les molécule et les positionner à partir de l'infini.

9. Comme vu précédemment, l'énergie par ion doit être divisé par 2. Cependant, nous sommes intéressé ici à l'énergie par molécule, nous devons donc réellement compter chaque contribution deux fois, d'où le fait que le facteur $1/2$ n'est plus nécessaire.

Pourquoi l'écrivons-nous de cette façon? Le numérateur 2 est dû à la présence de deux termes (à droite et à gauche de notre atome de sodium) dont la contribution à la sommation est la même. Le premier terme de la sommation est négatif car il provient des atomes de chlore négatives à distance a , suivis par les atomes de sodium à distance $2a$ est ainsi de suite. La sommation s'avère être une série harmonique alternée dont la somme est $\ln 2$, nous avons donc :

$$U_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{a} \ln 2 = -1.386 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a}$$

Considérons maintenant la ligne tout juste en haut. L'atome de chlore le plus proche se trouve à distance a , les atomes des sodium suivants sont à distance $\sqrt{2}$, les suivants à distance $\sqrt{5}$ et ainsi de suite :

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} \left(-\frac{1}{1} + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{10}} \mp \dots \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} \left[-1 + 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{1+n^2}} \right) \right]$$

Cette série converge à la valeur 0.440917,⁽¹⁰⁾ mais nous avons 4 lignes de telle sorte : celle en haut, celle en bas, avant et derrière l'atome de référence. Le résultat totale pour ces termes est donc :

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} 4 \left[-1 + 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{1+n^2}} \right) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} 4(-1 + 2 \cdot 0.440917) = -0.473 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a}$$

Le principe du calcul est maintenant clair. Si nous nous arrêtons ici le résultat serait :

$$U_1 + U_2 = -1.859 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} = -1.859 \cdot 5.12 \text{ eV} \approx -9.51 \text{ eV}$$

Le calcul comprenant tous les atomes (que nous ne poursuivrons pas ici) fournit la valeur :

$$U_1 + U_2 = -1.747 \cdot 5.12 \text{ eV} \approx -8.94 \text{ eV}$$

Cette valeur est légèrement supérieure à celle déterminée expérimentalement. Ceci est dû au fait qu'en réalité les atomes sont légèrement compressibles et que l'énergie dépensée dans la compression est rendue à nouveau disponible lorsque les ions s'éloignent, par conséquent l'énergie requise pour la vaporisation est légèrement inférieure à celle calculée avec cette méthode. Si nous prenons également en compte l'énergie cinétique des vibrations cristallines, alors l'accord est parfait.

Ce calcul nous montre que le concept d'énergie électrostatique a une réelle importance et montre aussi que la plus part de l'énergie d'un cristal ionique de type NaCl est effectivement de nature électrostatique.

2.1.3 Effets mécaniques d'origine électrostatique

Comme nous l'avons vu, dans un conducteur les charges se disposent sur la surface de celui-ci. Cette surface représente une limite infranchissable pour les charges électriques, par conséquent lorsque celles-ci ont atteint la surface conductrice elles exerceront une pression, dite *pression électrostatique*, dû à la répulsion entre charges et qui s'exerce de l'intérieur vers l'extérieur.

Pour calculer la pression électrostatique, nous utiliserons la méthode directe. Imaginons donc que la surface S du conducteur soit divisée en une partie dS et la restante $S - dS$. Le champ électrique près de la surface peut alors être décomposé en la somme de deux contributions, provenant chacune de la partie de la surface considérée. Nous indiquons avec $\vec{E}^{(dS)}$ la contribution provenant de la surface dS et avec $\vec{E}^{(S-dS)}$ la contribution provenant de la portion $S - dS$. Évidemment, pour le principe de superposition :

$$\vec{E} = \vec{E}^{(dS)} + \vec{E}^{(S-dS)} \Rightarrow \vec{E}^{(S-dS)} = \vec{E} - \vec{E}^{(dS)}$$

10. Ceci peut être vérifié aisément sur le site <http://www.youmath.it/ym-tools-calcolatore-automatico/analisi-2/somma-di-una-serie-di-potenze-online.html>

le champ électrique sur la surface externe d'un conducteur a été calculé dans (2.1) et vaut $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$. En répétant le raisonnement dans §2.1.1, le champ électrique dans le voisinage de la surface peut être approximé par le champ d'une surface plane, ce qui est $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$. Il s'ensuit que le champ $\vec{E}^{(S-dS)}$ est $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la surface et donc aussi sur la surface elle-même. Par définition, la force électrostatique exercée sur la surface S est la force exercée sur une charge $dq = \sigma dS$ par le champ $\vec{E}^{(S-dS)}$:

$$\vec{F}^{(dS)} = \sigma dS \vec{E}^{(S-dS)} = \sigma dS \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S}$$

puisque la pression est une force par unité de surface, il s'ensuit que la pression électrostatique est :

$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (2.5)$$

Les forces électrostatiques se manifestent évidemment entre charges voisines. C'est le cas par exemple de deux plaques conductrices plates à charges opposées. Pour calculer la force avec laquelle les deux plaques sont attirées (ou repoussées si elles ont une charge du même signe), nous allons utiliser une méthode plus général, connu sous le nom de *principe des travaux virtuels*.¹¹

2.2 Capacité électrique

2.2.1 Capacité d'un conducteur isolé

Considérons un conducteur isolé dans l'espace. Si nous chargeons le conducteur avec une charge q_1 , elle se placera à sa surface selon une densité de charge superficielle $\sigma(x, y, z)$. Le champ électrique créé est proportionnel à la charge q_1 , comme vu dans §1.3. Le potentiel généré par ce champ s'écrit :

$$V - V(\infty) = \int_{\text{conducteur}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si nous ajoutons maintenant une deuxième charge q_2 au conducteur, le champ sera la somme du champ créé par q_1 et q_2 et de la linéarité des intégrales (et donc pour le principe de superposition) ainsi en est pour le potentiel. Par conséquent, *le potentiel est proportionnel à la charge qui le génère*, $V \propto Q$. Historiquement, cependant, la relation de proportionnalité fut écrite de façon inversée :

$$Q = CV \quad (2.6)$$

où C est la *capacité* du conducteur isolé.

Dans le système MKS, elle a évidemment les dimensions de $[Q][V]^{-1}$, *Coulomb/Volt*. Cette unité est appelée *Farad* et elle est indiquée avec F.¹²

A titre d'exemple, et parce que nous utiliserons ce résultat par la suite, calculons la capacité d'une sphère isolée ayant une charge Q et un rayon R . Le champ électrique généré par la sphère est donné par la (1.12) :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

le potentiel est donc :

$$V - V(\infty) = \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

par conséquent, de la définition il s'ensuit :

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

11. Ce principe a une validité tout à fait générale et pas seulement en électromagnétisme. En général, il est étudié dans le domaine de la mécanique supérieure.

12. Cette unité porte le nom du physicien anglais Michael Faraday, qui a grandement contribué à la théorie de l'électromagnétisme et que nous rencontrerons plus tard.

Le terme *capacité* a été choisi exprès pour souligner l'analogie avec l'hydraulique. En hydraulique, la capacité est synonyme de volume. Un récipient de grande capacité est un récipient qui peut contenir de grandes quantités de liquide et dont le niveau varie peu lorsque du liquide est ajouté, par rapport à une capacité plus petite. Dans le cas électrostatique, on dit qu'un conducteur a une grande capacité lorsque son potentiel varie peu par rapport à une variation de charge donnée. Un conducteur ayant une capacité de 1 F est un corps qui varie son potentiel de 1 Volt lorsque sa charge varie de 1 Coulomb. C'est une capacité extrêmement grande. A titre d'exemple calculons la capacité de la Terre, considérée comme un corps conducteur :

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = 4 \cdot 3.1416 \cdot 8.854 \times 10^{-12} \cdot 6.4 \times 10^6 = 712 \times 10^{-6} F = 712 \mu F$$

La Terre en effet a une capacité extrêmement élevée, si élevée qu'elle est utilisée en tant que corps de référence où il est possible de décharger n'importe quelle charge sans que celle-ci change de potentiel. C'est bien ceci le concept de *mise à la terre*, qui est très souvent fait en insérant littéralement de longues électrodes dans le sol pour disperser les charges.

2.2.2 Capacité d'un ensemble de conducteurs. Condensateurs

Considérons maintenant un conducteur S_1 isolé ayant une charge Q_1 , celui-ci générera un champ électrique et donc un potentiel V_1 . Approchons maintenant un conducteur déchargé S_2 pour qu'ils interagissent électrostatiquement. Le potentiel V_2 (au point où se trouve le conducteur S_2) est dicté par la charge Q_1 présente sur le conducteur S_1 .¹³ Cependant sur le conducteur S_2 y aura un phénomène d'influence électrostatique par le conducteur S_1 , notamment nous aurons des charges opposés sur le côté faisant face à S_1 et des charges du même signe de l'autre côté. Cette configuration crée un champ dû à l'influence électrostatique tendant à réduire le potentiel V_1 près du conducteur S_1 . Par conséquent, pour garder la même valeur du potentiel V_1 qu'en l'absence du conducteur S_2 , il est nécessaire d'avoir une charge supplémentaire $Q > Q_1$ sur le conducteur S_1 . En d'autres termes, *la présence du conducteur S_2 à proximité du conducteur chargé S_1 augmente la capacité de ce dernier.*

Le même raisonnement peut être appliqué si est le conducteur S_2 qui est chargé ou si les deux sont chargés. De manière générale les potentiels V_1 et V_2 sont liés aux charges présentes sur les conducteurs par les relations :

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

et plus en général pour N conducteurs :

$$V_i = \sum_{j=1}^N p_{ij}Q_j \quad i = 1, \dots, N \quad (2.8)$$

les coefficients p_{ij} s'appellent *coefficients de potentiels* et le fait que le système soit linéaire formalise le principe de superposition. Les coefficients dépendent de la géométrie (fixe) du système, donc lors qu'on a assigné les charges Q_i les potentiels doivent être déterminés de façon unique. Ceci implique que la matrice doit être à déterminant non nul et inversible (plus spécifiquement, cette matrice est également symétrique et la relation $p_{ii} \geq p_{ij}$ subsiste). Le système (2.8) peut alors être inversé pour obtenir les relations :

$$Q_i = \sum_{j=1}^N c_{ij}V_j \quad i = 1, \dots, N$$

où c_{ij} sont appelés *coefficients d'induction* et les coefficients sur la diagonale c_{ii} correspondent aux capacités des différents conducteurs.

13. Dans l'hypothèse d'avoir imposé l'annulation du potentiel à l'infini.

Un cas particulier d'une importance pratique considérable est celui où l'influence entre deux conducteurs est totale, c'est-à-dire lorsque toutes les lignes de champ issues d'un conducteur se terminent sur l'autre. Un système qui jouit de cette propriété est appelé *condensateur* et les deux conducteurs qui constituent les armatures du condensateur s'appellent *électrodes*.

Si nous donnons à l'armature S_1 du condensateur une charge Q , sur l'armature S_2 les charges se redistribuent par effet de l'influence électrostatique et en cas d'influence totale la charge sur la face tournée vers S_1 sera $-Q$, tandis que du côté opposé sera présente une charge Q . Si maintenant l'armature S_2 est mise à la terre, la charge Q de S_2 peut se disperser et S_2 aura maintenant une charge $-Q$. Dans cette situation, il est dit que le condensateur est *chargé*. Il est facile de démontrer que, dans cette hypothèse, la différence de potentiel entre les armatures (généralement désignée par le terme *tension électrique* ou simplement *tension*) est proportionnelle à la charge présente sur les armatures. En fait, si nous considérons le système (2.7), en substituant $Q_1 = -Q_2 = Q$ nous avons :

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q - p_{12}Q \\ V_2 = p_{21}Q - p_{22}Q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = (p_{11} - p_{12})Q \\ V_2 = (p_{12} - p_{22})Q \end{cases} \rightarrow V_1 - V_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q$$

à savoir $\Delta V \equiv Q/C$. Il a donc sens parler de capacité et de tension pour un système de deux conducteurs en influence totale.

Il existe trois configurations géométriques possibles pour avoir influence totale :

1. **Sphérique.** Il s'agit du cas où un conducteur est complètement contenu dans un autre, dont la forme la plus simple est une sphère, et on parle de *condensateur sphérique*.

En supposant S_1 chargé positivement avec charge Q , appelé R_1 le rayon de S_1 et R_2 le rayon de la cavité de S_2 , dans l'espace entre les deux conducteurs le champ électrique est et donné par la (1.12) :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

et donc la différence de potentiel s'écrit :

$$V_1 - V_2 \equiv \Delta V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$$

d'où :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$$

2. **Cylindrique.** Dans le cas où le conducteur intérieur se développe essentiellement le long d'une ligne et l'autre est enroulé autour de lui donnant lieu à une structure tubulaire, l'influence totale est atteinte uniquement dans la limite d'une longueur l beaucoup plus grand que les dimensions transversales. La géométrie la plus simple dans ce cas est celle où les conducteurs ont une forme cylindrique et dans ce cas on parle de *condensateur cylindrique*.

Dans le cas où $l \gg R_1, R_2$, le champ électrique entre les deux conducteurs est donné par la (1.10) :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \frac{1}{r} \hat{r} \quad (R_1 \leq r \leq R_2) \quad \lambda = \frac{Q}{l}$$

il s'en suit :

$$V_1 - V_2 \equiv \Delta V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

d'où :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 2\pi\epsilon_0 l \frac{1}{\ln(R_2/R_1)}$$

3. **Planaire.** Dans le cas où les deux conducteurs se font face avec une surface S dont les dimensions linéaires sont beaucoup plus grandes que la distance d qui les sépare, alors il y a une situation d'influence totale qui est autant plus précise que les surfaces deviennent des surfaces infinies. La géométrie la plus simple est quand les surfaces sont des plans et dans ce cas nous parlons de *condensateur plan*.

Dans ce cas, le champ électrique est donné par le champ (1.11) :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n} = \frac{Q}{S\varepsilon_0} \hat{n} \quad \sigma = \frac{Q}{S}$$

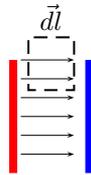
la différence de potentiel s'écrit donc :

$$V_1 - V_2 \equiv \Delta V = \frac{Q}{S\varepsilon_0} \int_1^2 \hat{n} = \frac{Qd}{S\varepsilon_0}$$

d'où la capacité d'un condensateur plan :

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta V} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}} \quad (2.9)$$

cette formule n'est pas exacte, car le champ électrique ne se termine pas brusquement à la fin des plans et, par conséquent, la densité de charge n'est pas exactement σ partout. Le calcul correct montre que la densité de charge est plus élevée sur les bords et que la capacité est légèrement supérieure à celle calculée ici. Il est utile de noter que cet effet de bord est prévisible sur la base de considérations générales sur le champ électrique. En fait, si le champ était comme dans le cas idéal, la circulation calculée le long de la ligne \vec{dl} dans la figure suivante :



serait :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

car le segment à l'intérieur du condensateur donne une contribution non nulle à l'intégrale contrairement aux trois autres.

Comme nous l'avons vu, un condensateur est constitué de deux armatures ayant charges opposées. Il s'ensuit que les deux armatures du condensateur doivent s'attirer avec une certaine force : nous voulons maintenant calculer cette force dans le cas d'un condensateur plan.

Pour cela faire nous allons utiliser un principe très général qui est généralement introduit en mécanique supérieure,¹⁴ qui dans le contexte qui nous intéresse ici sera formulé de cette façon : *Considérons un conducteur C dans un champ électrostatique \vec{E} . Imaginez que vous changiez la configuration géométrique du conducteur d'une quantité infinitésimale (mouvement virtuel). Pour ce faire, une force externe $d\vec{F}^e$ (force virtuelle) qui fera un travail (travail virtuel) doit être appliquée à chaque élément du conducteur :*

$$\delta L^e = d\vec{F}^e \cdot \delta \vec{x}$$

mais par définition, l'énergie électrostatique coïncide avec le travail effectué sur le système, donc :

$$\delta L^e = d\vec{F}^e \cdot \delta \vec{x} = \delta U \quad \Rightarrow \quad d\vec{F}^e = \frac{\delta U}{\delta x}$$

14. Ce principe a été formalisé par Lagrange et nous ne l'exposerons pas dans sa forme précise ici.

d'autre part la force externe $d\vec{F}^e$ est égale et opposée à la force électrostatique à laquelle l'élément est soumis, donc :

$$d\vec{F} = -\frac{\delta U}{\delta x} \quad (2.10)$$

Pour le condensateur plan, le mouvement virtuel consistera en l'éloignement d'une armature de δx . Suite à ce déplacement, la variation de l'énergie électrostatique par rapport au volume $S\delta x$ (¹⁵) s'écrit :

$$\delta U = (u_f - u_i)S\delta x$$

Comme en dehors des armatures du condensateur le champ est 0 et à l'intérieur est σ/ε_0 , il s'ensuit que $u_i = 0$ et $u_f = \sigma/\varepsilon_0$. Il s'ensuit immédiatement pour l'énergie électrostatique :

$$\delta U = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} S\delta x$$

et donc :

$$d\vec{F} = -\frac{\delta U}{\delta x} = -\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} S \equiv \mathcal{U}S$$

la force d'attraction entre les armatures d'un condensateur est donc proportionnelle à l'énergie électrostatique du champ présent à l'intérieur du condensateur.

Nous allons faire maintenant une brève digression pour voir comment ces résultats théoriques sont appliqués dans la réalité.

Construction et utilisation d'un condensateur

À quoi un objet comme celui-ci peut-il être utile? Il est évidemment utile pour stocker une charge confortablement.

Si par exemple nous essayons de conserver une grande quantité de charge avec une simple sphère, lorsque nous atteignons un certain potentiel la charge commencera à s'échapper et se dispersera dans l'atmosphère par des décharges électriques. Si par contre l'on prend deux très grandes surfaces conductrices, par exemple en forme de feuilles d'aluminium et qu'on les place à une très petite distance, par exemple en les séparant avec une feuille de matériel isolant, on prend le tout et on l'enroule, on obtient un condensateur très compact et de grande capacité.

C'est en fait le principe de construction de base et c'est ainsi que les anciens condensateurs radio étaient fabriqués. Aujourd'hui, bien sûr, la technique évolue et selon les caractéristiques que nous recherchons les matériaux isolants peuvent être de différents types (verre, céramique, polyester). Afin d'obtenir une capacité particulièrement élevée, la séparation entre les armatures peut être constituée par une fine couche d'oxyde obtenue par moyen électrolytique (et dans ce cas on parle de *condensateurs électrolytiques*).

À quoi peut être utile en pratique? Reprenons notre analogie hydraulique et considérons un réservoir. Nous pompions de l'eau dans ce réservoir, mais le débit n'est pas constant. En même temps, différents utilisateurs prélèvent l'eau de ce réservoir de manière variable, parfois lentement, parfois avec des pointes de forte demande. Et la demande des utilisateurs doit être satisfaite sans changer la pression de l'eau indépendamment des fluctuations de débit qui sont en amont pour charger le réservoir.

En électronique, le condensateur a le rôle de réservoir : il permet de stocker une grande quantité de charge (eau) sans que son potentiel (pression d'eau) ne varie en fonction des demandes des utilisateurs (la charge du circuit) varie, et ceci quel que soit le courant (la pompe à eau) arrivant. ¹⁶

2.3 Le problème général de l'électrostatique dans le vide

Considérons une distribution de charge $\varrho(\vec{r})$ située dans l'espace vide. Selon la (1.2), le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}'$$

15. S est évidemment la surface des armatures du condensateur.

16. Le lecteur sait déjà qu'un courant électrique est formé par un flux ordonné de charges électriques.

Nous avons déjà vu que le champ ainsi défini satisfait aux équations de Maxwell (1.8) et (??). La seconde de ces équations implique que le champ électrique soit le gradient d'une fonction potentielle tel que (1.5). Compte tenu de ces relations, il est évident que le potentiel électrique satisfait la relation :

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \vec{\nabla} V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

L'opérateur $\nabla \cdot \vec{\nabla} \equiv \nabla^2$ s'appelle *laplacien* et en coordonnées cartésiennes il s'écrit :

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

et l'équation qui en résulte :

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad (2.11)$$

est appelé *équation de Poisson*. Cette équation inclut les deux équations de Maxwell et le fait que le champ électrique est le gradient d'un potentiel. Par conséquent lorsque les conditions aux limites appropriées ont été assignées, l'équation (2.11) caractérise complètement le potentiel V . En termes plus précis, tout potentiel satisfaisant la (1.4) (c'est-à-dire dont le gradient satisfait la relation rappelée au début de ce paragraphe) vérifie l'équation de Poisson et tout potentiel solution de l'équation de Poisson et qui va à zéro à l'infini vérifie l'équation (1.4). Cette propriété est garantie par le *théorème d'unicité de la solution de l'équation de Poisson*, que nous allons brièvement illustrer dans la section suivante.

La formulation en termes d'équation de Poisson présente un intérêt évident dans les cas de conducteurs dont la distribution des charges est inconnue, ce qui est en effet souvent le cas. Au cas où il n'y a pas de conducteurs, la solution est évidemment donnée par la (1.4).

Sous l'appellation *problème général de l'électrostatique* nous entendons la recherche des solutions de la (2.11) avec les conditions aux limites appropriées.

Généralement, les situations qui peuvent survenir sont de trois types. D'autres cas peuvent être facilement déduits à partir de ceux-ci :

Il n'y a pas de charges localisés. Le champ électrostatique est alors généré par un ensemble S_i de conducteurs ayant potentiel connu et assigné V_i . Dans ce cas, l'équation de Poisson se réduit à l'équation de *Laplace* :

$$\nabla^2 V = 0$$

Avec les conditions aux limites appropriées, à savoir $V \rightarrow 0$ à l'infini et V_i assignés aux conducteurs, ce problème est parfaitement défini du point de vue mathématique. Évidemment, cela ne garantit pas que la solution soit simple à trouver, mais d'un point de vue conceptuel le problème est bien défini et résolu. Ce cas s'appelle *Problème de Dirichlet*.

Il n'y a pas de charges localisées, mais il y a S_i conducteur à géométrie connue dont les potentiels ne sont pas assignés, mais les charges Q_i sont connues. Dans ce cas, à partir de la géométrie des conducteurs il est possible d'en déduire la matrice des potentiels (2.8) et par conséquent le potentiel V_i sur les conducteurs individuels, revenant ainsi au cas précédent.

Il y a des charges localisées, décrites par une densité ρ et un ensemble de conducteur S_i dont les charges Q_i sont connues. Ce problème est décrit par l'équation de Poisson (2.11) et lorsque les conditions aux limites sont connues (elles sont connues quand les potentiels V_i sont connus), la solution est unique. Dans cette configuration, cependant, les potentiels ne sont pas connus, par contre nous connaissons les charges Q_i présentes sur les conducteurs S_i .

Le problème est rendu plus complexe dans ce cas par le fait que le potentiel V_i ne dépend pas seulement des charges présentes sur la surface des conducteurs, mais aussi de la distribution ρ . Par conséquent, formellement, au lieu du système (2.8), le système des potentiels prend la forme suivante :

$$V_i = V_i(\rho) + \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j \quad i = 1, \dots, N \quad (2.12)$$

Or, les coefficients p_{ij} sont bien connus à partir de la configuration géométrique du système, alors que les potentiels "partiels" $V_i(\rho)$ sont inconnus. Pour résoudre ce problème, nous faisons recours

à une méthode itérative. Nous attribuons des potentiels de test $V_i^{(0)}$ aux différents conducteurs et avec ces potentiels nous allons résoudre l'équation de Poisson correspondante. A partir de cette solution de "test" $V^{(0)}(x, y, z)$ nous pouvons calculer les densités de charge $\sigma_i^{(0)}$ et les charges $Q_i^{(0)}$, ensuite par moyen du théorème de Coulomb les $V_i^{(0)}$. En substituant ces valeurs de test dans le système des potentiels :

$$V_i^{(0)} = V_i(\varrho) + \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j^{(0)} \quad i = 1, \dots, N$$

le premier terme, les charges et les coefficients potentiels sont maintenant connus, il est donc possible de dériver les valeurs des potentiels "partiels" $V_i(\varrho)$. Ces valeurs peuvent ensuite être utilisées dans la (2.12) pour dériver le potentiel V_i , les cas échéant en répétant la procédure.

Ces valeurs vont être ensuite les conditions aux limites pour résoudre l'équation de Poisson.

2.3.1 Propriétés mathématiques de l'équation de Poisson

THÉORÈME D'UNICITÉ DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION DE POISSON

Soit \mathcal{V} une région de l'espace délimitée par une surface S et $\varrho(x, y, z)$ une fonction pouvant être intégrée dans le volume. Considérons l'équation de Poisson $\nabla^2 f = \varrho$ avec la condition que $f = f_S$ sur la surface S .

Nous démontrerons que cette équation admet une seule solution.

Supposons par l'absurde que deux solutions distinctes existent f_1 et f_2 . Par hypothèse, elles satisfont les conditions :

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_1 &= \varrho & f_1|_S &= f_S \\ \nabla^2 f_2 &= \varrho & f_2|_S &= f_S \end{aligned}$$

par conséquent, grâce à la linéarité des solutions et des dérivées premières :

$$\nabla^2(f_1 - f_2) = 0 \quad (f_1 - f_2)|_S = 0$$

la fonction $f_1 - f_2$ satisfait donc l'équation de Laplace ayant conditions aux limites $(f_1 - f_2)|_S = 0$, à savoir elle s'annule sur la surface S . En indiquant avec $f \equiv f_1 - f_2$, il s'ensuit que :

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (\nabla f) d\mathcal{V} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} f \nabla^2 f d\mathcal{V}}_{=0} + \int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} f)^2 d\mathcal{V} = \underbrace{\int_S f \vec{\nabla} f \cdot dS}_{=0}$$

où l'intégrale sur le volume est nulle pour l'équation de Laplace, l'intégrale de surface est nulle pour la condition limite sur S et le théorème flux-divergence est appliqué. Il s'ensuit que :

$$\int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} f)^2 d\mathcal{V} = 0$$

cette relation nous dit que nous avons à faire à une fonction positive ou nulle ayant intégrale nulle, il doit donc être $\vec{\nabla} f = 0$, d'où f est constante. Mais puisque $f = 0$ sur la surface S , il s'ensuit que f doit être nulle partout. On peut conclure que $f_1 = f_2$ partout, c'est-à-dire $f_1 \equiv f_2$, donc l'équation de Poisson admet une seule solution.

Le théorème d'unicité est également valable si la surface S tend vers l'infini, car dans ce cas ϱ est non nulle seulement dans une partie de l'espace. De plus, étant donné que nous ne disposons pas d'une surface sur laquelle imposer une valeur par défaut, il est nécessaire d'imposer des conditions sur le comportement à l'infini du potentiel et du champ électrique, conditions que seront l'annulation à l'infini respectivement comme $1/r$ et $1/r^2$. Du point de vue mathématique, nous devons

exiger que $f(r)$ et $\frac{df(r)}{dr}$ aillent à l'infini selon l'ordre de infinitésimale r et r^2 , c'est-à-dire imposer que :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r f(r) = c_1$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{df(r)}{dr} = c_2$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires (mais finies) et r est la distance de l'origine.

FONCTIONS HARMONIQUES ET THÉORÈME DE LA MOYENNE

En mathématiques une *fonction harmonique* est une fonction définie dans un volume \mathcal{V} et fini, qui admet des dérivées secondes et qui satisfait l'équation de Laplace. Une propriété intéressante est le *théorème de la moyenne*. Ce théorème établit que la valeur moyenne d'une fonction harmonique sur une surface sphérique est égale à la valeur que la fonction assume au centre de la sphère.

Soit $f(r)$ une fonction harmonique. Sa valeur moyenne sur une sphère S de rayon r s'écrit :

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S f(r) dS = \frac{1}{4\pi} \int_S f(r) \frac{dS}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \int_S f(r) d\Omega$$

où évidemment l'élément d'angle solide $d\Omega$ s'écrit dS/r^2 . Comme il est constante sur la surface r , il peut être amené sous intégration. Nous pouvons ensuite dériver par rapport à r :

$$\frac{d\bar{f}(r)}{dr} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{df(r)}{dr} d\Omega = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \frac{df(r)}{dr} r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \frac{df(r)}{dr} dS = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \vec{\nabla} f(r) dS$$

en appliquant le théorème flux-divergence nous avons :

$$\frac{d\bar{f}(r)}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \vec{\nabla} f(r) dS = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} f(r)] d\mathcal{V} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\mathcal{V}} \nabla^2 f(r) d\mathcal{V} = 0$$

Cette relation nous indique que la valeur moyenne est indépendante du rayon r car $d\bar{f}(r)dr = 0$. Mais alors nous pouvons choisir r dans un voisinage de 0, cette valeur doit donc être égale à la valeur que $f(r)$ prend au centre de la sphère, ce qui démontre notre théorème.

Ce théorème mathématique est utile car il nous permet de formaliser ce qui a été anticipé sur la base du raisonnement dans §1.3.1. Un point d'équilibre est en effet une valeur d'extremum du potentiel (que ce soit un maximum ou un minimum). Lorsque la sphère S est centrée sur ce point, la moyenne du potentiel sur la sphère ne pourrait pas être équivalente à la valeur centrale.¹⁷ Un potentiel électrostatique ne peut donc pas présenter des points de maximum ou de minimum et une charge ne peut donc être en équilibre par les seules forces électrostatiques.

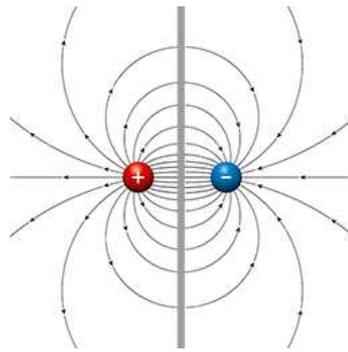
2.4 Techniques pour résoudre le problème général dans quelques cas particuliers

Dans ce paragraphe, nous allons discuter de quelques méthodes pour calculer le potentiel (et par conséquent le champ électrostatique) *en pratique*. Certaines de ces méthodes nécessitent de l'intuition et de l'inventivité, mais elles sont extrêmement puissantes.

2.4.1 Méthode des images

Revenons à un problème connu que nous avons déjà résolu : le champ généré par un dipôle, montré dans la figure suivante.

17. De toute évidence, à moins d'avoir une fonction constante dans toute l'espace, la valeur moyenne d'une fonction ne peut pas être le même de son maximum ou son minimum.



Les surfaces équipotentielles sont des surfaces perpendiculaires aux lignes de champ électrique représentées en figure. Considérons en particulier la surface représentée en gris. Étant équidistante de deux charges électriques opposées, cela représente une surface à potentiel 0.

Plaçons une surface conductrice exactement sur une surface équipotentielle et amenons-la à la valeur du potentiel en ce point. Ceci est certainement possible parce que nous avons déjà vu que le champ électrostatique interne d'un conducteur est nul et par conséquent le conducteur entier est équipotentiel.¹⁸ Rien ne change donc dans la configuration des lignes du champ et donc aucune expérience ne peut dire qu'un plan conducteur a été inséré à cet endroit.

Par conséquent, dans l'exemple précédent nous pouvons placer un conducteur sur la surface équipotentielle $V = 0$ et oublier – par exemple – la charge positive à gauche. Dans la région de droite rien n'a changé car le potentiel répond aux mêmes conditions aux limites. En conséquence du théorème d'unicité de la solution de l'équation de Poisson, on peut donc en déduire que la forme du potentiel dans la région de droite est la même dans les deux cas. Mais cette nouvelle configuration correspond à celle d'une charge négative faisant face à une surface conductrice plane.

En vertu du théorème d'unicité, on peut donc raisonner à l'inverse : *en cas d'un problème complexe, comme peut l'être celui d'une charge devant une surface conductrice équipotentielle, on peut réduire celui-ci à un problème plus simple ne comportant que des charges – éventuellement ponctuels – à condition que la répartition des charges soit telle qu'elle satisfasse aux mêmes conditions limites que le problème d'origine. C'est cela la méthode des images électriques.*

Dans l'exemple ci-dessous, la méthode de l'image consiste à dire que le champ électrique de notre problème dans la région de l'espace qui nous intéresse est équivalent à celui d'un dipôle. Donc, si nous résolvons le problème des dipôles, nous avons également notre solution. La seconde charge, fictive, que nous mettons en place pour simuler les conditions aux limites sur la surface, s'appelle *image électrique* car il s'agit d'une charge fictive positionnée de manière à satisfaire les conditions aux limites.

En effet, avec ce système on évite de calculer la solution en utilisant directement les équations de Poisson ou de Laplace (selon les cas) pour calculer par contre celle d'un système de charges ponctuelles plus simple, dont le potentiel peut être facilement calculé avec la formule :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$$

où les images électriques sont convenablement arrangées afin de satisfaire les conditions aux limites du problème donné.

Ce qui se passe physiquement, en réalité, c'est que les charges sur la surface considérée sont réparties de manière à simuler l'existence d'une charge électrique "derrière" la surface.

Dans notre exemple de la charge devant un plan conducteur, le problème de trouver le champ électrique est donc résolu rapidement. Il est intéressant de calculer la distribution *réel* de charge sur le plan et pour cela nous utiliserons la relation (2.1), à savoir 1) le champ électrique est perpendiculaire à la surface conductrice et 2) le champ électrique près de la surface est la densité de charge superficielle σ divisée par ϵ_0 .

18. Nous avons également vu que le champ électrique est normal à la surface d'un conducteur et ceci est cohérent avec le positionnement d'une feuille conductrice sur une ligne équipotentielle.

Soit a la distance de la charge réelle (négative, à droite) de la surface du plan et r la distance sur le plan à partir du point directement au-dessous de la charge électrique. Le potentiel électrostatique généré par la charge négative $-q$ s'écrit donc :

$$V_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

et la composante normale du champ électrique s'écrit :

$$E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{aq}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

à cela il faut ajouter la contribution de la charge image (positive). Les contributions perpendiculaires à la surface sont égales et s'additionnent, les composantes le long des autres directions s'annulent mutuellement. La composante du champ électrique le long de la ligne de potentiel 0 (occupée par notre surface conductrice) est donnée par :

$$E = E_- + E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

d'où :

$$\sigma = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon_0 a q}{(a^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{aq}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

Si notre raisonnement est correct, l'intégrale de la densité σ étendue au plan doit donner exactement q , et cela est bien le cas. Compte tenu du fait que nous devons intégrer sur tout le plan et que r peut être considéré comme étant le rayon d'un cercle centré sous la charge, la surface est $S = \pi r^2$ donc $dS = 2\pi r$ et l'intégrale étendue au plan s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_S \sigma dS &= \frac{aq}{2\pi} \int_S \frac{1}{(a^2 + r^2)^{3/2}} dS = \frac{aq}{2\pi} \int_S \frac{2r\pi}{(a^2 + r^2)^{3/2}} dr = aq \int_S \frac{1}{2} \frac{2r}{(a^2 + r^2)^{3/2}} dr = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \Big|_0^{+\infty} aq = \frac{aq}{a} = q \end{aligned}$$

ce que nous voulions démontrer.

Demandons-nous maintenant si la charge négative est affectée par une force : c'est évidemment le cas, car elle est attirée par les charges positives induites sur le plan. Connaissant la densité due à l'influence totale, il est facile de calculer la force comme étant :

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r)}{r^2} \hat{r} dS$$

cependant, la méthode des images nous donne la solution immédiatement sans avoir à calculer l'intégrale. En effet, nous savons que la force agissant sur la charge est *la même que celle d'une image +q placée de façon spéculaire par rapport à la surface S et sans le plan conducteur*. Autrement dit, la force est donnée par :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2}$$

La méthode des images électriques peut résoudre complètement le problème de l'électrostatique, sauf pour calculer l'énergie électrostatique du système. En fait, si nous calculons l'énergie du système charge plus plan conducteur avec la méthode de l'image, nous obtenons une valeur deux fois supérieure à la valeur réelle. Après tout, ceux-ci demeurent deux problèmes *physiquement* différents : alors que dans le cas du dipôle le champ électrique est présent dans tout l'espace, dans le cas du plan conducteur le champ n'est présent que dans région considérée, donc dans la moitié de l'espace. Si nous considérons l'énergie électrostatique comme "contenue" dans les champs, nous comprenons immédiatement pourquoi la méthode de l'image nous fournit une valeur double par rapport à la vraie valeur.

2.4.2 Équation de Laplace en dimension 1

Si la géométrie du système est telle que le champ électrique ne peut dépendre que d'une seule variable, alors l'équation de Laplace devient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

ce qui implique que $\frac{\partial V}{\partial x}$ est une constante, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = a \quad \Rightarrow \quad V(x) = ax + b$$

et donc le potentiel a une tendance linéaire.

C'est le cas d'un condensateur plan dans l'hypothèse où les armatures sont des surfaces infinies. Dans ce cas, soit $V(0) = V_0$ sur la première armature et $V(d) = 0$ sur la deuxième à distance d . Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} V(0) = b & \rightarrow & b = V_0 \\ V(d) = 0 & \rightarrow & ad + V_0 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad a = -\frac{V_0}{d}$$

d'où :

$$V(x) = -\frac{V_0}{d}x + V_0 = V_0 \left(1 - \frac{x}{d}\right)$$

2.4.3 Séparation des variables

Dans certains cas et si les conditions aux limites le permettent, la solution de l'équation de Laplace peut être écrite sous une forme factorisée. Autrement dit et en prenant comme exemple les coordonnées cartésiennes, la solution peut être écrite sous la forme :

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Dans ce cas, si nous considérons que les dérivées partielles n'agissent que sur la partie correspondante de la fonction, l'équation de Laplace prend la forme :

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} Y(y) Z(z) + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} Z(z) + X(x) Y(y) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

et aux points où la solution ne s'annule pas, il est possible de diviser par $X(x)Y(y)Z(z)$ en obtenant :

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

or, il s'agit de la somme de trois termes indépendants et cela est égale à une constante. Puisque les fonctions sont indépendantes, le seul moyen d'y parvenir est que les trois termes soient eux-mêmes des constantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = c_1 \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = c_2 \\ \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = c_3 \end{cases} \quad \text{avec la condition que } c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

ce sont trois équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants du type :

$$\begin{cases} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - c_1 X(x) = 0 \\ \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - c_2 Y(y) = 0 \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + c_3 Z(z) = 0 \end{cases}$$

dont la solution est donnée par :¹⁹

$$\begin{cases} X(x) = A_1 \cos(c_1 x + B_1) \\ Y(y) = A_2 \cos(c_1 y + B_2) \\ Z(z) = A_3 \cosh(\sqrt{c_1^2 + c_2^2} z + B_3) \end{cases}$$

où les constantes d'intégration c_i , A_i et B_i doivent être trouvées en fonction des conditions aux limites.

2.4.4 Résolution dans le champ complexe

Dans de nombreux problèmes, les variations du champ dans une direction sont nulles ou peuvent être négligées par rapport aux deux autres dimensions. Dans ces cas, la solution ne dépend que de deux dimensions et nous parlons de *problèmes bidimensionnels*. Un cas typique est celui d'un fil conducteur : si le fil est placé le long de z , en des points pas trop éloignés du fil le champ ne dépend que de x et y . Dans ce cas, l'équation de Laplace prend la forme suivante :

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Soit maintenant une variable complexe $Z = x + iy$. Chaque fonction de cette variable $F(Z)$ peut être décomposée en une partie réelle pure et une imaginaire pure $F(Z) = U(x, y) + iV(x, y)$. Par exemple :

$$F(Z) = Z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \equiv U(x, y) + iW(x, y)$$

avec $U(x, y) = x^2 - y^2$ et $W(x, y) = 2xy$.

Un théorème d'analyse complexe permet d'affirmer que *une fonction est holomorphe²⁰ sur un ensemble du plan complexe si elle est différentiable et vérifie les relations de Cauchy-Riemann :*

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

dérivant une seconde fois par rapport à x et y les relations de Cauchy-Riemann, on obtient facilement que les deux fonctions $U(x, y)$ et $W(x, y)$ satisfont automatiquement les relations :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$$

c'est-à-dire que les deux fonctions $U(x, y)$ et $W(x, y)$ sont harmoniques.

Maintenant, la découverte intéressante est que les fonctions décrivant les potentiels électrostatiques réels sont assez "tranquilles" pour satisfaire les hypothèses du théorème mentionné ci-dessus. En conséquence, *en vertu du théorème d'existence et d'unicité de la solution de l'équation de*

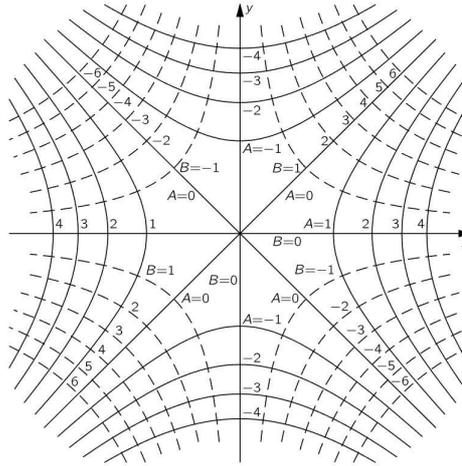
19. L'étude des équations et la recherche de solutions est laissée aux cours de mathématiques.

20. En mathématiques, une fonction holomorphe est une fonction définie sur une partie ouverte du plan des nombres complexes \mathbb{C} avec valeurs dans \mathbb{C} est qui est différentiable dans un sens complexe à chaque point du domaine.

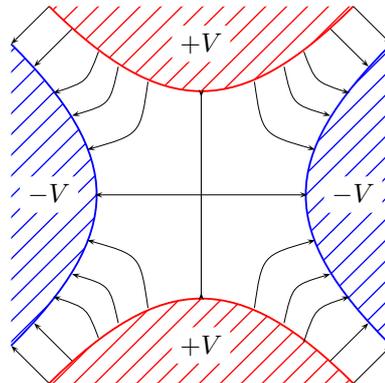
Laplace, les fonctions $U(x, y)$ et $W(x, y)$ représentent un vrai potentiel électrostatique bidimensionnel. En effet, en prenant une fonction $F(Z)$ assez régulière, celle-ci doit représenter deux problèmes électrostatiques bidimensionnels.

En pratique, nous pouvons écrire une fonction complexe, trouver les fonctions $U(x, y)$ et $W(x, y)$ et trouver - en procédant en sens inverse - le problème qu'elles représentent.²¹ Nous allons utiliser cette approche pour l'exemple ci-dessus.

Considérons la fonction $U(x, y)$, nous savons que cela représente un potentiel. Pour voir alors à quel problème répond-elle, considérons les surfaces équipotentielles $x^2 - y^2 = A$. Cette équation représente une hyperbole régulière, qui pour $A = 0$ devient une droite passant par l'origine ($x = y$).



Si les lignes en trait plein identifiées par des valeurs différentes de A identifient les surfaces équipotentielles, alors les lignes pointillées (qui sont perpendiculaires aux premières et identifiées par les lettres B) représentent le champ électrique. Comme vu précédemment, si nous imaginons de placer des conducteurs le long des lignes équipotentielles le champ électrique reste le même, mais nous obtenons une configuration tel que ci-dessous :



En d'autres termes, la solution $U(x, y)$ représente le problème dans lequel nous avons quatre surfaces hyperboliques ayant des potentiels assignés. Cette configuration de conducteurs a une caractéristique particulière : le champ électrique suivant la direction x et y (toujours en fonction du (1.5)) est donné par :

$$E_x = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = 2x \quad E_y = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = -2y$$

à savoir, le champ électrique est proportionnel à la distance du centre de l'hyperbole. En particulier, la force le long de l'axe y est dirigée vers le centre : *une charge décentrée par rapport à l'axe y subit une*

21. En fait, beaucoup de solutions aux problèmes complexes qui peuvent être trouvés dans les textes ont été obtenues de cette manière.

*force qui tend à le ramener au centre. Cette particularité est très importante et largement utilisée dans la pratique. Des conducteurs hyperboliques de forme appropriée produisent un champ électrique de manière à ramener une particule chargée au centre si elle en est éloignée. Une telle configuration agit alors comme une sorte de lentille électrostatique (**lentille quadrupolaire**) et elle est actuellement utilisée afin de focaliser des faisceaux de particules, par exemple dans des accélérateurs.*

Il n'échappera pas au lecteur le fait que la force est dirigée vers le centre le long de y et vers l'extérieur le long de x . Dans les applications pratiques nous avons deux cas : soit deux lentilles différentes se suivent avec des potentiel "croisé" de sorte que chacune d'entre elles focalise le faisceau sur un axe, soit une lentille longue (dans la direction z) dans lequel le potentiel des quatre électrodes conductrices varient alternativement dans le temps afin de focaliser alternativement le long de deux axes.

Chapitre 3

Électrostatique en présence de diélectriques

Dans le chapitre précédent, nous avons traité des propriétés d'un conducteur immergé dans un champ électrostatique. Dans ce chapitre, nous allons discuter des propriétés et des phénomènes qui se produisent lors qu'un corps *isolant* est immergé dans un champ électrostatique.

3.1 La constante diélectrique

A première vue, on pourrait penser qu'un corps isolant, c'est-à-dire ne possédant pas de charges électriques libres de mouvement, ne devrait pas être affecté par la présence d'un champ électrique. Cependant, en faisant plusieurs expériences Michael Faraday découvrit que cela n'était pas le cas. En particulier, il démontra que *lorsqu'un matériau isolant est placé entre les armatures d'un condensateur, sa capacité augmente.*

Supposons d'avoir un condensateur plan chargé, sur les armatures duquel il y a une charge Q . De la définition de capacité électrique nous avons :¹

$$C_0 = \frac{Q}{\Delta V_0} \quad C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

Si la charge sur le condensateur et la géométrie du système restent inchangées, mais l'espace entre les armatures est rempli d'un *diélectrique* (c'est ainsi que dorénavant le matériau isolant sera appelé), Faraday observa que la différence de potentiel était plus faible $\Delta V < \Delta V_0$. Il doit donc s'avérer :

$$\Delta V < \Delta V_0 \quad \Rightarrow \quad C > C_0$$

Le rapport $C/C_0 \equiv \varepsilon_r$ ne dépend que du matériau utilisé et prend le nom *constante diélectrique relative* ou *permittivité relative*. De l'expression de la capacité il s'ensuit :

$$C = \varepsilon_r C_0 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d} \equiv \varepsilon \frac{S}{d}$$

et la constante $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ prend le nom *permittivité diélectrique*. Des valeurs typiques sont indiquées dans le tableau suivant :

1. Nous utilisons l'index 0 pour indiquer les quantités référées au vide.

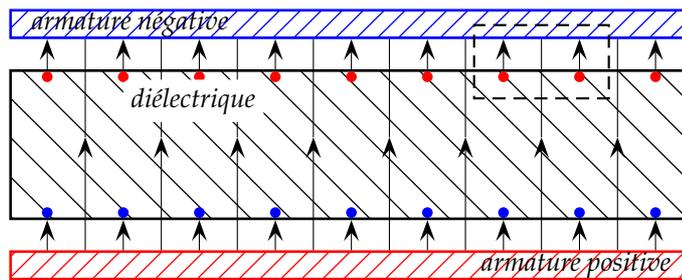
Matériau	ϵ_r
air	1.0006
pétrole	2.1
papier	3.5
verre	4→7
mica	8
silicium	12
éthanol	25
eau (20 °C)	80

Nous devons donc expliquer comment il est possible qu'un corps isolant sans charges libres puisse produire des effets électriques. Pour ce faire, nous partirons de l'observation qu'en présence de diélectriques, la capacité d'un condensateur augmente.

Si pour une même charge la capacité augmente, à partir de la relation (2.6) :

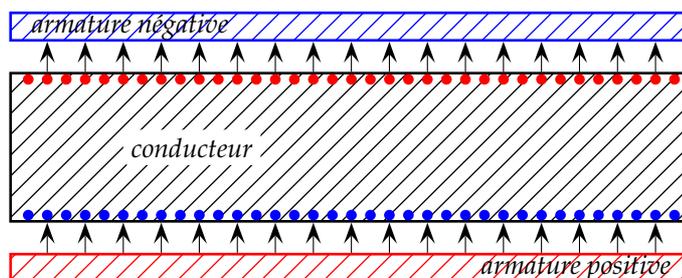
$$Q = CV$$

il s'ensuit que la différence de potentiel doit diminuer. Mais la différence de potentiel entre les armatures du condensateur est donnée par l'intégrale du champ électrique à travers le condensateur, donc nous sommes obligés de conclure que le champ électrique entre les armatures d'un condensateur contenant un diélectrique est plus faible. Pour comprendre comment cela soit possible, revenons à la loi de Gauss (1.7).



Considérons la surface de Gauss la surface pointillée de la figure ci-dessus. Le champ électrique devant être plus faible, le flux doit être lui aussi plus faible et donc *il doit y avoir moins de charges dans le volume considéré*. La seule façon pour que ce soit possible est qu'il y ait des charges aussi à la surface du diélectrique. Ces charges n'annuleront pas exactement celles du condensateur, comme cela se produirait avec un conducteur, mais elles sont suffisantes pour affaiblir le champ électrostatique à l'intérieur du condensateur.

Ceci est tout à fait évident si l'espace entre les armatures est rempli d'un matériau conducteur. Les charges dans ce cas sont libres de se déplacer et donc l'induction qui en résulte est complète : le champ à l'intérieur du conducteur est nul et dans la limite où cela remplit l'espace entre les armatures nous nous retrouvons avec un seul corps conducteur au même potentiel.² Considérons la situation avec un conducteur :



2. La différence de potentiel entre les plaques passe à zéro et n'a plus de sens de parler de capacité en ces termes, parce que les charges opposées sur les armatures peuvent se rencontrer et s'annuler.

Le champ à l'intérieur du conducteur est nul, donc en calculant l'intégrale de \vec{E} pour obtenir la différence de potentiel seule la partie dans le vide donnera une contribution, par conséquent le ΔV sera inférieur et la capacité sera plus grande.

Puisque il n'y a pas de charges électriques libres dans le diélectrique et celui-ci est électriquement neutre, à chacune des charges doit correspondre une charge de signe opposé, elles doivent donc se présenter en couple. Autrement dit, les charges présentes à l'intérieur d'un diélectrique doivent se présenter sous forme de *dipôle*.

À son temps Faraday proposa, et finalement cela est une hypothèse raisonnable, que le diélectrique soit formé par un matériau isolant dans lequel sont immergés beaucoup de petites sphères conductrices.³ Évidemment de nos jours nous avons une vision différente et la question de l'origine réelle de ces dipôles, dont un indice a déjà été donné dans §1.5, sera approfondi dans le paragraphe §3.5.

Il est important de souligner que ce qui est important ici est seulement le fait qu'il *doit y avoir des dipôles dans le diélectrique qui sont "induits" par le champ électrique externe*. Nous suivrons pour le moment un chemin plus historique, supposons donc que ces dipôles existent et voyons comment les équations écrites dans le vide en résultent modifiées.

Ensuite, nous allons expliquer l'origine de ces dipôles dans les matériaux isolants.

3.2 Le vecteur polarisation et les charges liées

Nous supposons donc que dans la matière soumise à un champ électrique, des dipôles de charge élémentaire q et longueur \vec{r} sont générés. Le moment dipolaire élémentaire est alors donné par :

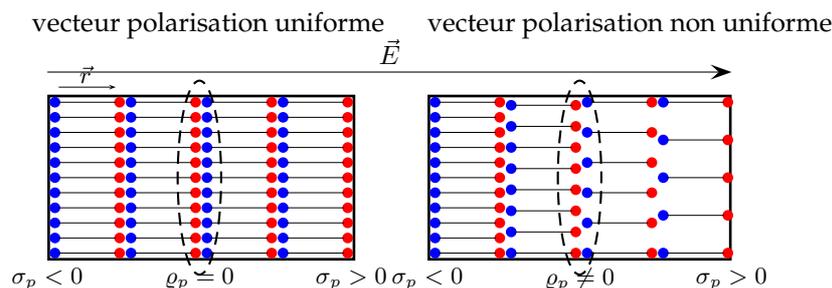
$$\vec{p} = q\vec{r}$$

Si nous avons N atomes ou molécules par unité de volume, alors le *vecteur polarisation (densité volumique de moment dipolaire électrique)* est donné par :

$$\vec{P} = Nq\vec{r}$$

et donc le volume dV a un moment dipolaire $\vec{P}dV$. En général, \vec{P} varie d'un point à l'autre du matériau, mais il s'avère que⁴ il est proportionnel au champ électrique appliqué et orienté selon le champ électrostatique. La constante de proportionnalité, comme nous le verrons, dépend du matériau isolant.

Nous savons qu'à l'intérieur d'un diélectrique les charges ne sont pas libres de se déplacer comme dans un conducteur, cependant la présence de dipôles peut être formalisée par la présence de charges superficielles et volumiques que nous indiquerons avec σ_p et ρ_p .



Comme le montre le diagramme, il sera nécessaire de distinguer les deux cas où la polarisation est constante dans le matériau et lorsqu'elle ne l'est pas.

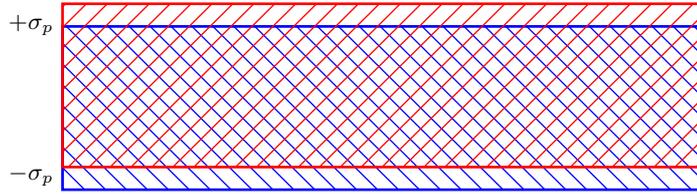
Considérons le cas où la polarisation est constante. Dans ce cas, il est évident que le déphasage entre les charges positives et négatives induites par le champ externe produit une densité de charge $\rho_p = 0$ à l'intérieur du volume, car chaque charge positive des dipôles est compensée par une charge négative égale.⁵ Le bloc entier de diélectrique peut alors être considéré comme une

3. Sphères parce que l'induction ne doit pas dépendre de la direction du champ dans le diélectrique.

4. Sous certaines hypothèses qui seront spécifiées dans §3.5.

5. Cela est dû au fait que le nombre de dipôles par unité de volume reste constant dans le diélectrique.

distribution positive et négative décalées de \vec{r} , la longueur du dipôle induit.



Soit S la surface du diélectrique, alors la charge sur cette surface est donnée par $NSq|\vec{r}|$ ($S|\vec{r}|$ représente le volume occupé par les charges électriques). En conséquence, la densité superficielle est donnée par :

$$\sigma_p = \frac{Q}{S} = \frac{NSq|\vec{r}|}{S} = Nqr$$

mais ceci est exactement le vecteur polarisation. En gardant à l'esprit que le vecteur déplacement du dipôle \vec{r} est parallèle au champ, qui est par définition parallèle au vecteur de polarisation, il s'ensuit :

$$\boxed{\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}} \quad (3.1)$$

où \hat{n} est la normale à la surface.

Considérons maintenant le cas où la polarisation n'est pas constante à l'intérieur du diélectrique. Imaginons une surface S à l'intérieur du diélectrique, lorsque nous appliquons un champ électrique les charges vont se déplacer et certaines d'entre elles traverseront la surface S . La quantité de charge qui traverse cette surface est donnée par le flux de \vec{P} sur la surface S et si la polarisation n'est pas constante, le nombre de charges entrant d'un côté ne sera pas nécessairement le même des charges sortant de l'autre côté.⁶ La variation de la charge liée Q_p à l'intérieur de cette surface peut donc être écrite comme l'inverse du flux du vecteur polarisation :

$$\Delta Q_p = - \int_S \vec{P} \cdot \hat{n}$$

en même temps, cette charge nette peut être interprétée comme étant due à une densité volumique ρ_p :

$$\Delta Q_p = \int_V \rho_p dV$$

d'où :

$$\int_V \rho_p dV = - \int_S \vec{P} \cdot \hat{n} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV$$

où nous avons utilisé le théorème flux-divergence. Il s'ensuit :

$$\boxed{\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}} \quad (3.2)$$

Une façon plus formelle de trouver les densités de charges liées.

Nous allons maintenant obtenir ces relations d'une façon plus formelle.

Pour ce faire, nous calculerons le potentiel en un point $\vec{r} = (x, y, z)$ à partir d'un diélectrique occupant un volume \mathcal{V} et ayant un vecteur polarisation $P(x, y, z)$. De la relation (1.13), la contribution apportée par un moment dipolaire équivalent à $\vec{P}dV$ est donnée par :

$$dV(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}dV}{r^3} \quad \rightarrow \quad V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}(\vec{r})dV}{r^3}$$

grâce à la (1.14) cette équation peut s'écrire :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) dV$$

6. Ce qui se passe nécessairement si la polarisation est constante, donc $\rho_p = 0$ dans ce cas.

De la propriété mathématique (qui s'ensuit des propriétés des dérivées) $\vec{\nabla}(\vec{A}f) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}f + (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})f$ nous pouvons écrire :

$$\vec{\nabla} \left[\vec{P} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \left(\frac{1}{r} \right) \rightarrow \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = \vec{\nabla} \left[\vec{P} \left(\frac{1}{r} \right) \right] - (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \left(\frac{1}{r} \right)$$

d'où :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \left[\vec{P} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{r} d\mathcal{V} \right]$$

et en appliquant le théorème flux-divergence :

$$V(x, y, z) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{P} \cdot \hat{n}}{r} dS}_{\text{contribution superficielle } \sigma} - \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{r} d\mathcal{V}}_{\text{contribution volumique } \rho}$$

où S est la surface enfermant le volume \mathcal{V} . De cette relation il s'ensuit facilement les (3.1) et (3.2).

3.2.1 Le champ électrique à l'intérieur des diélectriques

A l'intérieur d'un diélectrique, il est plus approprié de parler du champ électrique local E_l . Chaque atome ou molécule est affecté par le champ externe \vec{E} , mais aussi par le champ de toutes les autres molécules ou atomes qui l'entourent. Ce champ varie en réalité énormément d'un point à un autre et d'un moment à l'autre car il dépend de la position relative de notre molécule par rapport aux charges positives et négatives des autres et change constamment aussi du fait du mouvement des électrons, qui ne sont pas dans des positions fixes. Dans ce contexte, cependant, nous considérons toujours des volumes contenant un grand nombre de molécules et sur des intervalles de temps certainement supérieurs à celui de révolution des électrons. Par conséquent, au niveau macroscopique nous pouvons parler d'une sorte de champ moyen que nous appellerons alors *champ local*, destiné à prendre en compte des volumes infinitésimaux mais toujours importants par rapport aux dimensions atomiques.

Rappelons maintenant la figure en haut de la page 42 et appliquons le théorème flux-divergence à la surface pointillée. On sait que le champ électrique est donné par la densité de charge *totale* divisée par ϵ_0 , donc :

$$E = \frac{\sigma - \sigma_p}{\epsilon_0} = \frac{\sigma - P}{\epsilon_0}$$

cette équation ne nous donne d'information que si nous connaissons la forme de \vec{P} , cependant nous supposons que le moment dipolaire est proportionnel au champ électrique $\vec{P} = N\alpha\vec{E}$, où N est le nombre de dipôles par unité de volume et α prend le nom de *polarisabilité* du matériau. Cette relation de proportionnalité est généralement écrite sous une forme mettant en évidence la constante diélectrique du vide :

$$\vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E}_l \simeq \chi\epsilon_0\vec{E}$$

où χ prend le nom de *susceptibilité électrique* et l'approximation est valable pour les gaz, où le champ électrique externe coïncide pratiquement avec le champ local.⁷ Le champ électrique peut alors s'écrire :

$$E = \frac{\sigma - P}{\epsilon_0} = \frac{\sigma - \chi\epsilon_0 E}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{1 + \chi} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Rappelons-nous que nous sommes partis de l'observation que la capacité d'un condensateur avec diélectrique augmentait d'un facteur ϵ_r . Cette variation était due au fait que la différence de potentiel était plus petite, ce que nous avons compris à son tour comme étant lié au fait que le champ électrique dans le diélectrique est réduit par rapport au champ libre. Maintenant, nous avons trouvé ce facteur de réduction à $1 + \chi$, donc nous pouvons déduire la relation :

$$\boxed{\epsilon_r = 1 + \chi}$$

7. Ceci est dû à la faible interaction des molécules entre eux.

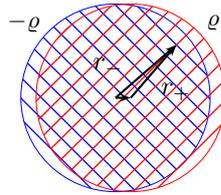
Concernant les liquides, en ce cas les interactions entre les molécules ne sont pas négligeables. Cependant, si nous faisons les hypothèses :

1. champ électrique des molécules purement dipolaires,
2. répartition uniforme des dipôles,
3. moment de dipôle le long du champ externe,
4. le moment de dipôle de toutes les molécules est le même

alors nous pouvons raisonner comme suit. Dans un liquide, l'espace occupé par un atome ou une molécule entouré par les autres peut être considéré comme étant approximativement sphérique. Le champ local qui affecte notre molécule est donc donné par le champ présent à l'intérieur d'un trou dans le diélectrique.⁸ Pour le champ local, vous pouvez écrire :

$$E = E_l + E_{\text{sphère}} \quad \rightarrow \quad E_l = E - E_{\text{sphère}}$$

où E_l est le champ local produit par toutes les molécules sauf celle considérée et $E_{\text{sphère}}$ est le champ électrique à l'intérieur de la sphère diélectrique occupée par notre molécule. Le champ total E est évidemment donné par la somme des deux. Le champ interne d'une sphère polarisée peut être calculé en exploitant le fait qu'une sphère polarisée peut être approximée par une superposition de deux sphères de charge opposée légèrement décalées :



À l'intérieur de la sphère, le champ électrique peut être calculé par la seconde de (1.12) en utilisant la densité de charge de polarisation. En un point générique à l'intérieur de la sphère identifiée par les deux vecteurs \vec{r}_+ et \vec{r}_- le champ généré par les deux distributions de charge est donné par :

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_+ \quad \vec{E}_- = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_-$$

d'où le champ totale à l'intérieur de la sphère :

$$\vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$

comme on peut le voir de la figure, $\vec{r}_+ - \vec{r}_-$ correspond à la distance entre les deux centres de charge et donc à la longueur du dipôle, par conséquent :

$$\vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} d\vec{r} \equiv -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

donc le champ locale peut s'écrire :

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Le vecteur polarisation s'écrit :

$$\vec{P} = n\vec{p}_0 = N\alpha\vec{E}_l = N\alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

8. Parce que le champ local est produit par toutes les molécules *sauf celle en considération*. Si nous enlevons notre molécule, le champ local en ce point sera le champ à l'intérieur d'un "trou" du diélectrique.

d'où :

$$\vec{P} - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}\vec{P} = N\alpha\vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{P} = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}}\vec{E}$$

or, nous savons aussi que $\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$ et $\varepsilon_r = 1 + \chi$, donc :

$$\vec{P} = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}}\vec{E} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$$

de cette relation s'ensuit immédiatement :

$$\chi = \frac{N\alpha}{\varepsilon_0 \left(1 - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}\right)} = \varepsilon_r - 1$$

à savoir :

$$\begin{aligned} N\alpha &= \varepsilon_0 \left[1 - \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}\right] (\varepsilon_r - 1) = \left[\varepsilon_0 - \frac{N\alpha}{3}\right] (\varepsilon_r - 1) \quad \rightarrow \quad N\alpha + \frac{N\alpha}{3}(\varepsilon_r - 1) = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \quad \rightarrow \\ N\alpha \left[1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{3}\right] &= N\alpha \left[\frac{3 + \varepsilon_r - 1}{3}\right] = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \quad \rightarrow \quad N\alpha = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \end{aligned}$$

d'où, finalement :

$$\boxed{\alpha = \frac{3\varepsilon_0}{N} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}} \quad (3.3)$$

Cette relation est appelée *relation de Clausius-Mossotti*⁹ et permet d'exprimer une quantité microscopique (la polarisabilité) en termes de quantités macroscopiques mesurables (la constante diélectrique relative).

La polarisation des corps solides est une question beaucoup plus complexe et nous ne l'aborderons pas dans ses détails analytiques dans ce contexte. Nous nous limiterons à noter que les solides peuvent présenter un large éventail de comportements différents :

- Certaines structures non isotropes peuvent présenter un alignement des dipôles même sans la présence d'un champ électrique externe. Dans ce cas, nous parlons de *polarisation permanente*.
- Généralement, dans les structures cristallines présentant des dipôles alignés, le champ produit est annulé par des charges externes (par exemple présentes dans l'air) qui se déposent progressivement sur la surface. Lorsque à la suite de contraintes mécaniques la configuration des dipôles est modifiée – même légèrement – le champ devient temporairement visible (car son annulation prend beaucoup de temps). Dans ce cas, nous parlons de *piézoélectricité*. Si le changement de configuration du dipôle se produit à la suite de variations de température, on parle de *pyroélectricité*.
- Si le matériel dispose de dipôles internes permanents et ceux-ci sont emballés dans un réseau de Bravais permettant aux dipôles de tourner librement (par exemple, un réseau cubique), alors même un champ externe faible peut provoquer un changement dans la plupart des dipôles, produisant un grand effet macroscopique. Ceci sont appelé matériaux *ferroélectriques*.

3.3 Les équations de l'électrostatique en présence de diélectriques

Le point de départ pour discuter des équations de l'électrostatique en présence de diélectriques seront la (1.8) et la (??), que nous rapportons ici pour plus de commodité :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

9. Pour être précis, c'est l'une des formes dans lesquelles la relation de Clausius-Mossotti peut être écrite.

Alors que la seconde équation conserve sa validité également dans le cas des diélectriques, puisque le champ électrostatique reste un champ radialement symétrique même en présence de diélectriques, la première équation doit évidemment changer de forme. En fait, la densité ρ inclut *toutes* les charges électriques qui sont constitutives du champ, mais dans ce cas il faut aussi prendre en compte les charges liées qui se produisent dans le diélectrique. En explicitant ces dernières dans la première équation nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_e + \rho_p}{\varepsilon_0}$$

où avec ρ_e nous avons indiqué les charges libres et avec ρ_p les charges liées à la polarisation. Pour être utilisable, cette écriture nécessite la connaissance précise des charges liées, ce qui n'arrive pas souvent. En se basant sur la (3.2) cette relation peut être réécrite comme suit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} \quad (3.5)$$

d'où :

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e$$

où nous avons défini la quantité (*vecteur déplacement électrique*) :

$$\boxed{\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

En termes de ce vecteur, les équations de l'électrostatique deviennent formellement identiques à celles du vide :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_e \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \end{cases}$$

cependant, là où les équations sans diélectriques s'appliquent au même vecteur (\vec{E}) et ceci garantissant l'unicité de la solution, nous devons maintenant supporter une relation entre le vecteur \vec{E} et \vec{D} .

Digression historique concernant le vecteur \vec{D}

Il est intéressant de faire une petite digression historique. Aux débuts de la théorie de l'électromagnétisme il n'y avait pas connaissance du mécanisme de la polarisation et les seules charges connus étaient les charges libres ρ_e et la présence dans les équations d'un terme ρ_p dont on ne pouvait pas justifier l'origine n'était pas très bien vu. Pour garder donc les équations de Maxwell sous une forme simple, on choisit de définir un nouveau vecteur \vec{D} comme étant une combinaison linéaire du champ électrique \vec{E} et du vecteur polarisation \vec{P} .

Il y a une autre question concernant l'utilisation du vecteur \vec{D} . Quand nous disons que \vec{P} est proportionnelle au champ électrique \vec{E} et écrivons une équation du type $\vec{D} = \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0(1 + \chi) \vec{E}$ nous essayons de décrire une propriété de la matière. Mais le comportement de la matière est beaucoup plus complexe et la relation de proportionnalité entre \vec{P} et \vec{E} ne s'applique que sous certaines conditions. Qui plus est, la relation peut dépendre de la direction ou de la façon dont le champ électrique change avec le temps. En réalité, cette relation est une *approximation* et ne peut donc pas représenter une loi fondamentale de la nature. Les seules lois fondamentales sont celles qui impliquent le champ électrique \vec{E} qui conservent leur validité dans toutes situations.

La relation entre \vec{E} et \vec{D} se réduit à une relation entre \vec{P} et \vec{E} comme vu plus haut. D'une manière très générale, cette relation peut dépendre de la direction et elle est donc écrite plus correctement de la façon suivante :

$$\begin{cases} P_x = \alpha_{11} E_x + \alpha_{12} E_y + \alpha_{13} E_z \\ P_y = \alpha_{21} E_x + \alpha_{22} E_y + \alpha_{23} E_z \\ P_z = \alpha_{31} E_x + \alpha_{32} E_y + \alpha_{33} E_z \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

où la matrice :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

c'est en fait un tenseur qui prend le nom de *tenseur de polarisation*. Si les coefficients sont constants (indépendants du champ électrique et de la direction) on parle alors de *diélectrique parfait*. Ce n'est bien sûr pas toujours le cas : les matériaux ferroélectriques et les régimes dans lesquels la polarisation ne dépend pas du champ électrique sont des exemples de diélectriques non parfaits.

Dans le cas particulier où le diélectrique est homogène et isotrope, alors la polarisation ne dépend pas de la direction, elle est parallèle au champ électrique et parfaitement proportionnelle à celui-ci. Dans ce cas, la matrice revient à une matrice diagonale (puisque la polarisation ne dépend pas des composantes transversales du champ, mais uniquement de la composante parallèle) et les éléments diagonaux sont tous les mêmes (car la polarisation est la même dans toutes les directions). Dans ce cas la relation entre \vec{P} et \vec{E} devient une simple proportionnalité $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ et vous avez :

$$\vec{D} = \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad (3.6)$$

Si un diélectrique parfait remplit tout l'espace, les équations de l'électrostatique deviennent :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

et en divisant tout par $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

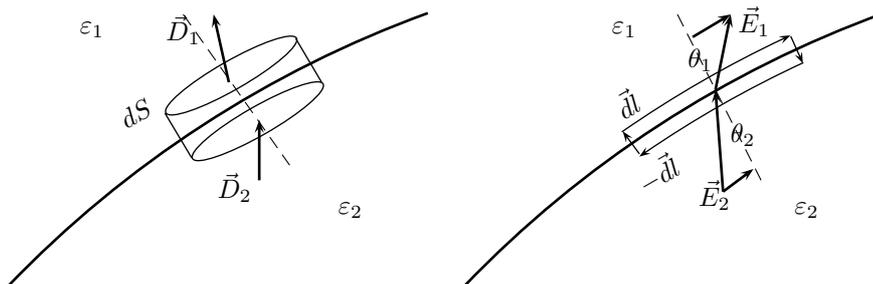
c'est-à-dire, le champ électrique est identique au cas sans diélectrique, seulement réduit par un facteur d'échelle ε_r .

Nous nous intéressons maintenant au cas où le diélectrique n'occupe pas tout l'espace, mais seulement une partie. La constante diélectrique présentera maintenant une discontinuité aux interfaces et, par conséquent, la constante ε ne peut être sortie du signe d'intégral. Par conséquent, la première des (3.8) ne tient pas tandis que la seconde continue - évidemment - à être valide.

D'un point de vue physique, cela signifie que le champ électrique \vec{E} présentera une discontinuité en traversant la surface. En effet, si l'on considère une surface qui entoure l'interface, le flux du champ électrique n'est pas nécessairement nul (et il ne l'est pas en général) en raison de la présence de charges liées.

Si nous considérons une ligne fermée qui traverse l'interface, le champ électrique continue d'être irrotationnel car la circulation reste nulle.

Dans chaque région diélectrique individuelle, les équations générales que nous avons écrit restent valides. Cependant, comme elles ne peuvent pas être étendus à tout l'espace, il faudra ajouter à celles-ci des conditions aux limites appropriées permettant de lier les solutions trouvées dans les différentes régions diélectriques.



Considérons un petit cylindre ayant des bases dS parallèles à la surface de séparation diélectrique et à la surface latérale infinitésimale. Le flux de \vec{D} doit être nul car il n'y a pas de charges à l'intérieur du cylindre et les charges liées sont incluses dans le vecteur \vec{D} . En conséquence :

$$\Phi(\vec{D}) = dS\vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 + dS\vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 = dSD_{\perp 1} - dSD_{\perp 2} = dS(D_{\perp 1} - D_{\perp 2}) = 0$$

où D_{\perp} indique la composante perpendiculaire à la surface dS , parallèle à la normale \hat{n} et il est pris en compte que les deux normales sont orientées dans le sens opposé (si le vecteur \vec{D}_2 rentre dans le cylindre, alors \vec{D}_1 en sort). De cette relation on déduit que la composante de \vec{D} normale à la surface ne subit pas de discontinuité. En rappelant la relation (3.6) il s'ensuit :

$$D_{\perp 1} = D_{\perp 2} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_1 E_{\perp 1} = \varepsilon_2 E_{\perp 2} \quad \rightarrow \quad \frac{E_{\perp 1}}{E_{\perp 2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

à savoir, que *en traversant la surface de séparation de deux diélectriques la composante normale à la surface du champ électrique subit une discontinuité égale au rapport des constantes diélectriques.*

Considérons maintenant le chemin fermé représenté sur la figure de droite, dont les segments latéraux sont des infinitésimaux d'ordre supérieur. Suivant le raisonnement déjà effectué, puisque la circulation s'annule il s'ensuit que la composante parallèle du champ électrique ne subit pas de discontinuité :

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} - \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \quad \rightarrow \quad E_{\parallel 1} dl - E_{\parallel 2} dl = 0 \quad \rightarrow \quad E_{\parallel 1} = E_{\parallel 2} \quad (3.9)$$

donc *à travers la surface de séparation de deux diélectriques, la composante du champ électrique parallèle à la surface ne subit pas de discontinuité.*

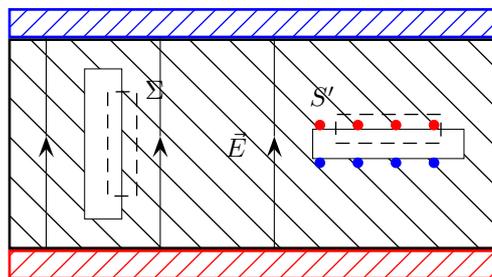
En divisant de membre à membre les deux équations, on obtient :

$$\frac{E_{\parallel 1}}{\varepsilon_1 E_{\perp 1}} = \frac{E_{\parallel 2}}{\varepsilon_2 E_{\perp 2}}$$

et au vu du fait que $E_{\parallel}/E_{\perp} = \tan \theta$:

$$\boxed{\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

Supposons maintenant d'avoir un diélectrique polarisé à l'intérieur duquel nous faisons deux fentes, l'une parallèle au champ électrique interne \vec{E} , l'autre perpendiculaire. On indique avec \vec{E} le champ à l'intérieur du diélectrique et avec \vec{E}_0 le champ mesuré dans les fentes.



D'après la deuxième équation de Maxwell (??) nous savons que la circulation calculé sur la ligne Σ doit être zéro. Mais ceci implique que la contribution du champ \vec{E} au sein du diélectrique doit être égale à celle mesurée dans la cavité \vec{E}_0 . Par conséquent, la mesure du champ dans la cavité fournit le champ électrique présent dans le diélectrique. Ce résultat peut également être trouvé sur la base de la (3.9). En effet, selon cette équation la composante parallèle à la surface de séparation diélectrique reste inchangé, et la composante parallèle est exactement celle qui est mesurée dans cette configuration.

Considérons maintenant une surface S' (par exemple un petit parallélépipède) qui coupe la surface de séparation diélectrique dans le cas d'une fente perpendiculaire au champ électrique. Dans ce cas, le champ électrique dans la fente ne coïncide pas avec le champ électrique dans le diélectrique car des charges liées sont présentes. Sur la base des équations (3.2) et (3.5) il s'ensuit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 + \frac{\rho_p}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \right)$$

d'où :

$$\vec{D}_0 \equiv \varepsilon_0 \vec{E}_0 = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \equiv \vec{D}$$

à savoir $\varepsilon_0 \vec{E}$ coïncide avec la valeur de \vec{D} dans le diélectrique.

Aux débuts de la science physique, il était important de trouver une définition opérationnelle pour chaque quantité définie. Ceci représentait donc un grand résultat pour l'époque car il permettait de définir de façon *opérationnelle* les quantités à l'intérieur des diélectriques en effectuant de mesures à l'extérieur (dans les fentes), sans avoir à calculer les champs à l'intérieur des matériaux en tenant compte de toutes les interactions atomiques.¹⁰

3.4 Énergie et forces électrostatiques en présence de diélectriques

Nous avons vu que l'énergie d'une distribution de charges est donnée par la (2.2) :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d\mathcal{V}$$

suivant le même raisonnement que pour le cas sans diélectrique, nous écrivons la densité des charges ρ à travers de la première des équations de Maxwell (équation de Maxwell-Gauss). Cependant, lorsque nous sommes en présence de diélectriques nous devons utiliser la première des (3.7) et non pas la (1.8). Nous avons donc :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) V d\mathcal{V}$$

en utilisant la même relation mathématique et remarquant que la relation $\vec{\nabla} V = -\vec{E}$ vaut toujours :

$$\vec{\nabla} \cdot (V \vec{D}) = \underbrace{(\vec{\nabla} V)}_{-\vec{E}} \cdot \vec{D} + V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = -\vec{E} \cdot \vec{D} + V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D})$$

d'où :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) V d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (V \vec{D}) d\mathcal{V} + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot \vec{D} d\mathcal{V}$$

Nous appliquons maintenant le théorème flux-divergence et remarquons que si le volume d'intégration s'agrandit jusqu'à devenir infini alors l'intégrale calculée sur la surface va à zéro :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} V \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot \vec{D} d\mathcal{V} \equiv \int_{\mathcal{V}} \mathcal{U} d\mathcal{V}$$

il s'ensuit que la densité d'énergie du champ électrostatique en présence de diélectriques s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{U} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}}$$

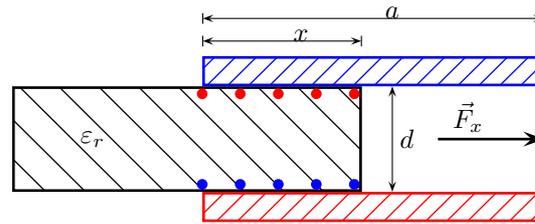
Si le diélectrique est parfait et isotrope, $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ et la densité d'énergie s'écrit :

$$\mathcal{U} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2}{2}$$

10. Il peut néanmoins être intéressant remarquer que ces quantités n'ont jamais été mesurées de cette manière. Cette définition opérationnelle reste donc dans les définitions de *principe*.

L'idée de énergie électrostatique permet de résoudre de façon simplifiée, presque immédiate, le problème de trouver les forces auxquelles les charges électriques sont soumises dans un diélectrique. Ce type de problème demanderait de prendre en compte toutes les interactions électriques entre toutes les charges et toutes les interactions mécaniques dans les corps solides, et ceci est un problème qui n'est pas résoluble en ces termes. En général, cependant, nous sommes intéressés tout simplement aux forces ou tensions auxquelles sont soumis les matériaux. C'est dans ce type de problème que le concept d'énergie électrostatique s'avère utile.

Considérons, par exemple, un condensateur dont les armatures sont partiellement remplies de diélectrique. Notons avec a la longueur des armatures, avec x la portion des armatures occupée par le diélectrique, avec d la distance entre celles-ci et avec b la largeur des armatures (non visible dans l'image suivante). La surface du condensateur est donc $S = ab$.



L'énergie électrostatique d'un condensateur plan peut s'écrire en utilisant la définition (2.2). Puisque nous avons ici une distribution superficielle de charge, elle devient :

$$U = \frac{1}{2} \int_S \sigma V dS$$

où S est la surface des armatures. Soit V_+ le potentiel de l'armature positive ayant une charge $+Q$ et V_- le potentiel de l'armature négative avec charge $-Q$. Puisque $\int \sigma dS = Q$, l'intégrale peut être écrite de la façon suivante :

$$\frac{1}{2} \int_S \sigma V dS = \frac{V_+}{2} \int_S \sigma dS + \frac{V_-}{2} \int_S \sigma dS = \frac{V_+ Q}{2} - \frac{V_- Q}{2} = \frac{Q}{2} (V_+ - V_-) \equiv \frac{1}{2} Q \Delta V$$

Cette équation peut être réécrite en une forme plus intéressante si on se rappelle la (2.6), à savoir $\Delta V = Q/C$:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Nous devons maintenant calculer la capacité du condensateur. Pour ce faire, nous allons nous baser sur la (2.9), à savoir $C = \epsilon S/d$, mais où il faudra tenir en compte le fait que le condensateur est partiellement rempli par le diélectrique. La capacité du condensateur sera donc la somme de deux termes : un pour la partie remplie de diélectrique et un pour la partie vide.

Si on appelle C_{diel} la capacité de la partie contenant le diélectrique et C_0 la capacité de la partie vide, nous avons :

$$C_{\text{diel}} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{bx}{d} \quad C_0 = \epsilon_0 \frac{b(a-x)}{d}$$

d'où la capacité totale du condensateur en fonction de la fraction occupée par le diélectrique :

$$C = C_{\text{diel}} + C_0 = \epsilon_0 \frac{b}{d} [\epsilon_r x + (a-x)] = \epsilon_0 \frac{b}{d} [a + x(\epsilon_r - 1)]$$

Il est immédiat trouver l'énergie électrostatique du système :

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 b [a + x(\epsilon_r - 1)]}$$

d'où, en appliquant la (2.10) :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dx} \left[\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b [a + x(\varepsilon_r - 1)]} \right] = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b} \frac{\varepsilon_r - 1}{[a + x(\varepsilon_r - 1)]^2}$$

Comme on peut le voir la force a signe positif, elle est donc directe le long de l'axe x : *le diélectrique est attiré à l'intérieur du condensateur et le système tend vers la configuration ayant la mineur énergie électrostatique.* Ceci est facilement vérifié si on considère les deux cas extrêmes :

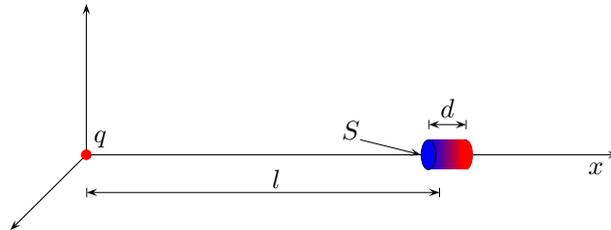
$$\left. \begin{aligned} U(0) &= \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b a} \equiv \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \\ U(a) &= \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 b [a + a\varepsilon_r - a]} \equiv \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_r C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow U(a) = \frac{1}{\varepsilon_r} U(0)$$

L'énergie électrostatique du système entièrement rempli par le diélectrique a diminuée d'un facteur ε_r par rapport au cas sans diélectrique.

POURQUOI FINALEMENT L'AMBRE ATTIRE LES MORCEAUX DE PAPIER ?

Avant de conclure cette discussion sur l'électrostatique en présence de diélectriques, nous devons encore aborder la discussion sur les premières expériences des Grecs. Nous sommes partis de l'observation que si nous frottons une baguette d'ambre, cela peut attirer de petits morceaux de papier. Mais si l'on peut dire que l'ambre est chargé électriquement, il n'en va pas de même pour les morceaux de papier, qui sont électriquement neutres et lorsqu'ils sont immergés entre deux armatures d'un condensateur ils ne sont en effet attirés par aucun des deux côtés. Alors, d'où les forces qui attirent les morceaux de papier proviennent-elles ?

Pour comprendre comment cela se produit, supposons d'avoir une charge q à l'origine d'un système de référence et à une distance l le long de l'axe x soit un petit cylindre de diélectrique ayant ε_r constant. La hauteur du cylindre est d , avec $d \ll l$. La surface de la base est S .



A l'intérieur du cylindre, la polarisation \vec{P} est donnée par $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$. De la configuration géométrique nous voyons que le champ électrique est perpendiculaire aux bases du cylindre, de sorte que la composante normale du vecteur \vec{D} ne change pas :

$$D_0(l - d/2) = D(l - d/2) \simeq D(l) = \frac{q}{4\pi l^2}$$

où nous avons exploité le fait que dans un diélectrique homogène parfait, la $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ est vérifiée. Le champ électrique et le vecteur de polarisation s'écrivent donc :

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r l^2} \quad \rightarrow \quad P = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{q}{4\pi l^2}$$

si on se rappelle que le moment dipolaire est donné par $\vec{p} = \vec{P}d\mathcal{V}$, on trouve :

$$p = P S d = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{q S d}{4\pi l^2}$$

Le point essentiel maintenant est que le champ électrique est dirigé le long de x , mais il n'est pas uniforme. La force ressentie par le dipôle est donnée par $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{p})$. Comme le champ est dirigé le long de x , $\vec{E} \equiv E_x \hat{x}$, et aussi $\vec{p} \equiv (p, 0, 0)$. Il s'ensuit :

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} = -2p \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^3} = -2 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{qSd}{4\pi x^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^3} = - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q^2 Sd}{8\pi\epsilon_0 x^5}$$

d'où la force ressentie par le cylindre à la position l :

$$\vec{F} = - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q^2 Sd}{8\pi\epsilon_0 l^5} \hat{x}$$

où le signe moins indique que la force est attractive. Ce résultat peut être résumé en disant que la diélectrique - par exemple un morceau de papier - est affecté par une force d'attraction parce que le champ électrique n'est pas constant et il est plus intense sur le côté proche plutôt que sur le côté éloigné du corps. De plus, cette force dépend de l'inverse de la cinquième puissance de distance, donc elle décroît très rapidement en s'éloignant de la charge source du champ.

3.5 Origine microscopique de la constante diélectrique

La différence entre les conducteurs et les diélectriques réside principalement dans le fait que dans le premier il y a des électrons libres de se déplacer dans le conducteur formant une sorte de "gaz électronique", dans le second par contre les électrons sont fermement liés aux atomes. En l'absence d'un champ électrique externe, les atomes sont sphériques et symétriques, il n'y a pas d'asymétries de charge et donc à distance ils apparaissent comme de petits objets totalement neutres. Techniquement, nous disons que tous les termes du développement multipolaire sont nuls et en particulier donc le terme dipôle.

En présence d'un champ électrique, cependant, l'apparition de certains phénomènes brise cette symétrie et génère un moment de dipôle macroscopique.

Sous des hypothèses assez générales et raisonnables, ce moment dipolaire est proportionnel au champ électrique externe.

3.5.1 Polarisation de déformation

Comme nous le savons, un atome est composé d'un petit noyau positif ayant une charge Ze d'environ 10^{-5} fois les dimensions atomiques et un "nuage" électronique pouvant être schématisé comme une distribution de charge variable avec continuité du centre à la périphérie, ce qui donne à l'atome une dimension de l'ordre de 10^{-10} m.

Si l'atome est immergé dans un champ électrique, le noyau et le nuage électronique auront tendance à s'éloigner parce qu'ils sont attirés en directions opposées. Bien que les atomes soient assez résistants à cette déformation, le champ est généralement suffisant pour déplacer le centre des charges. Cela crée une distance r entre le centre des charges positives et négatives, et cette configuration se comporte comme un dipôle. Dans ce cas, nous parlons de *polarisabilité électronique ou de déformation*.

Si le champ électrique n'est pas assez fort pour arracher les électrons, les deux distributions de charge (le noyau et le nuage électronique) auront tendance à s'attirer alors que le champ externe tend à les éloigner. La force avec laquelle les distributions sont attirées est donnée par :

$$F_{\text{attr}} = ZeE_{\text{attr}}$$

où E_{attr} est le champ électrique ressenti par les charges. Dans l'hypothèse où le nuage électronique peut être assimilé à une sphère uniformément chargée, on sait que le champ interne est donné par la (1.12), par conséquent le champ ressenti par le centre positif, déplacé de r , s'écrit :

$$E_{\text{attr}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r)}{r^2} \quad q(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

où la charge contenue dans la sphère de rayon r est écrite en fonction du produit de la densité de charge fois le volume considéré. Indiquant avec R le rayon atomique, la densité de charge dans l'hypothèse d'une sphère uniforme et homogène s'écrit :

$$\rho = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Ze}{4\pi R^3} \quad q(r) = \frac{\frac{3}{4}\pi Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} r^3 = Ze \frac{r^3}{R^3}$$

donc le champ électrique à la distance r du centre s'écrit :

$$E_{\text{attr}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{R^3} r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{R^3} r$$

La force d'attraction de deux centres de charge est donc :

$$F_{\text{attr}} = ZeE_{\text{attr}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{R^3} r \propto r$$

il s'agit donc d'une force élastique qui suit une loi semblable à la loi de Hooke. Par contre, la force entre les deux centres de charge due au champ externe s'écrit $F = ZeE$. A l'équilibre les deux doivent être égaux, donc nous obtenons :

$$F = F_{\text{attr}} \rightarrow ZeE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{R^3} r$$

à partir de laquelle, trivialement, le déplacement en termes du champ appliqué externe :

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 ER^3}{Ze}$$

d'où l'on voit que la longueur du dipôle dépend linéairement du champ électrique appliqué. Le moment dipolaire généré (*induit*) est donné par :

$$p = Zer = Ze \frac{4\pi\epsilon_0 ER^3}{Ze} = 4\pi\epsilon_0 R^3 E$$

et donc :

$$\boxed{\vec{p} = \alpha_d \vec{E}}$$

où α_d , qui dans ce modèle simplifié a la valeur $4\pi\epsilon_0 R^3$, prend le nom de *polarisabilité électronique* et constitue une mesure de la facilité de la polarisation de déformation d'un matériau.

3.5.2 Polarisation d'orientation

Comme anticipé dans §1.5, la distribution de charge de nombreuses molécules n'est pas symétrique et présente donc naturellement un composant dipolaire. C'est le cas des molécules diatomiques ioniques (par exemple H-Cl) et des molécules qui, du fait de leur configuration particulière, ont une distribution non symétrique des charges (par exemple l'eau H₂O).

En général, ces dipôles sont orientés au hasard et donc le moment total est pratiquement nul. Si cependant ces molécules sont immergés dans un champ électrique, celles-ci auront une tendance à s'orienter selon le champ. Les moments dipolaires seront essentiellement alignés le long des lignes de champ, générant ainsi une composante dipolaire macroscopique. Ce phénomène est appelé *polarisation d'orientation*.

Le calcul de la polarisation peut être fait simplement en utilisant les résultats de la physique statistique et avec quelques hypothèses de base.

Supposons donc d'avoir un gaz formé de molécules polaires, l'hypothèse de gaz nous permet de négliger les interactions entre les molécules et donc d'être en mesure d'examiner le champ local \vec{E}_l comme étant coïncidant avec le champ externe \vec{E} .

En présence d'un champ électrique, un dipôle est soumis à un moment donné par la (1.16) $\vec{m} = \vec{p} \times \vec{E}$, ce qui tend à orienter la molécule en fonction du champ tandis que l'agitation thermique tend à orienter au hasard les différents dipôles. L'équilibre entre ces deux tendances opposées est exprimé par la distribution de Boltzmann :

$$\mathcal{P}(U) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{U}{kT}} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}}$$

où U est l'énergie du dipôle $-\vec{E} \cdot \vec{p}_0 = -Ep_0 \cos \theta$. De la définition statistique de Boltzmann, la probabilité que le dipôle soit orienté dans une couronne circulaire fine d'angle solide $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ est donnée par :

$$d\mathcal{P} = \mathcal{P}(U(\theta))d\Omega = \mathcal{P}(U(\theta))2\pi \sin \theta d\theta = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}} 2\pi \sin \theta d\theta$$

Or, pour des valeurs de température raisonnablement élevées T ⁽¹¹⁾ l'exponentielle peut être développée en séries de Taylor en s'arrêtant au premier degré :

$$d\mathcal{P} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p_0 E \cos \theta}{kT} \right) \sin \theta d\theta$$

Remarquons que l'orientation de \vec{p}_0 doit avoir une symétrie cylindrique autour du champ \vec{E} et donc que la composante orthogonale est nulle en moyenne. Par conséquent, la valeur moyenne est orientée comme \vec{E} et le composant est parallèle au champ s'écrit :

$$\langle p \rangle_E = \int_0^\pi p \cos \theta d\mathcal{P} = \frac{1}{2} \int_0^\pi p_0 \left(1 + \frac{p_0 E \cos \theta}{kT} \right) \cos \theta \sin \theta d\theta$$

cette intégrale est facilement résolue en remplaçant $\cos \theta \equiv y$, $-\sin \theta d\theta = dy$:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle_E &= \frac{1}{2} \int_0^\pi p_0 \left(1 + \frac{p_0 E \cos \theta}{kT} \right) \cos \theta \sin \theta d\theta = -\frac{1}{2} \int_1^{-1} p_0 \left(1 + \frac{p_0 E}{kT} y \right) y dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p_0 \left(1 + \frac{p_0 E}{kT} y \right) y dy = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} p_0 y^2 \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{p_0^2 E}{3kT} y^3 \right]_{-1}^1 = \frac{p_0^2}{3kT} E \end{aligned}$$

La polarisation d'orientation est donc elle aussi proportionnelle au champ électrique :

$$\boxed{\vec{p} = \alpha_o \vec{E}}$$

où α_o , qui prend la valeur $p_0^2/3kT$ dans notre modèle, s'appelle *polarisabilité d'orientation*. Deux observations peuvent être faites à propos de cette dépendance. La première est que la polarisation dépend de l'inverse de la température T , ce qui est raisonnable car plus la température est élevée et plus le désordre des molécules est grand. Cette tendance s'appelle *loi de Curie*.

La deuxième observation est la dépendance au carré du dipôle élémentaire permanent \vec{p} . Le premier terme \vec{p} vient du fait que la force qui tend à aligner le dipôle dépend de la "taille" du dipôle lui-même \vec{p} . Le seconde terme \vec{p} vient du fait que le moment résultant dépend aussi de la "taille" des dipôles élémentaires \vec{p} (comme on le voit à partir de l'écriture de la valeur moyenne ci-dessus).

11. Concrètement, pour des valeurs qui ne s'approchent pas du zéro absolu et donc certainement pour des températures ordinaires.

Courant électrique en régime continu

Dans ce chapitre nous discuterons du courant stationnaire, communément appelé *courant continu*. Comme nous l'avons fait précédemment, nous traiterons le sujet d'un point de vue plus théorique sans toutefois perdre de vue l'application concrète de la théorie.

Pour cette raison, contrairement à ce qui est fait d'habitude dans d'autres textes, dans ce chapitre nous n'aborderons pas la résolution des circuits en régime continu en profondeur, nous nous limiterons plutôt à montrer comment à partir des lois théoriques les règles connues pour la résolution des circuits sont dérivées.

Nous laisserons à la fin du chapitre la discussion de deux sujets non strictement liés à l'électromagnétisme et qui nécessitent une certaine connaissance de la chimie, mais qui sont néanmoins très intéressants : la conduction du courant dans les milieux liquides et gazeux et la construction pratique des générateurs de force électromotrice .

Ces deux derniers chapitres sont particulièrement intéressants car ils montrent de quelle manière domaines différentes de la science peuvent se coordonner afin d'expliquer un phénomène ou de créer des applications pratiques basées sur des lois générales.

4.1 Corps conducteurs et courant électrique

Dans le paragraphe §2.1 nous avons déjà mentionné qu'un conducteur métallique peut être schématisé tel qu'un réseau cristallin fixe tridimensionnel constitué de noyaux atomiques autour desquels un grand nombre d'électrons peuvent circuler librement. Ces électrons ne sont liés à aucun atome en particulier et peuvent se déplacer dans le conducteur, mais ils ne peuvent pas quitter le conducteur lui-même.

Pour avoir une idée du nombre d'électrons libres, considérons que chaque atome met à disposition un ou deux électrons. Prenons l'exemple du cuivre, qui fournit un électron par atome et dont le poids atomique est $A = 63.546$ uma. Une mole de cuivre pèse donc 63.546 g et à partir de sa densité nous pouvons calculer le nombre d'électrons :

$$\rho = 8.92 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad 1 \text{ mole} = \frac{63.546}{8.92} = 7.124 \text{ cm}^3 \quad \rightarrow \quad \frac{6.023 \times 10^{23}}{7.124} \approx 8.5 \times 10^{22} \frac{\text{électrons}}{\text{cm}^3}$$

Il s'agit d'un très grand nombre, bien au-delà de toute sensibilité expérimentale. Par conséquent, dans de nombreux cas pratiques cette "mer" d'électrons peut être considérée une sorte de gaz (*gaz d'électrons*) qui imprègne le réseau cristallin formé par les atomes. Dans cette schématisation, les électrons sont animés uniquement par une agitation thermique, qui peut être estimée selon les lois de la thermodynamique. En fait, en considérant les électrons comme des particules libres ayant trois degrés de liberté et en appliquant le théorème d'équipartition de l'énergie, nous avons :

$$\frac{1}{2} m_e \bar{v}_T^2 = \frac{3}{2} kT \quad \rightarrow \quad v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} \quad (4.1)$$

qu'à la température ambiante ($T \simeq 300^\circ K$) fournit :

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.88 \times 10^{23} \cdot 300}{9.11 \times 10^{-31}}} \approx 116 \text{ km/s}$$

La direction de ces mouvements est aléatoire, donc leur valeur moyenne est nulle et la vitesse moyenne aussi.¹ En fait, cette valeur est une sous-estimation d'environ un ordre de grandeur de la valeur réelle, parce qu'elle résulte d'un calcul purement classique qui ne tient pas compte du fait que les électrons sont soumis au principe d'exclusion de Pauli et par conséquent à certains effets quantiques dérivant de la théorie du potentiel de Fermi. L'approche quantique correcte est cependant complètement en dehors de la portée de ce cours.

Supposons maintenant d'appliquer une différence de potentiel *constante* ΔV aux extrémités *A* et *B* d'un conducteur. Pour la (1.3) et la (1.5), un champ électrique constant existe dans le conducteur donné par :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Delta V \quad (4.2)$$

les électrons du conducteur sont maintenant soumis à un champ électrique, ils sont donc affectés par une force qui tend à les faire bouger le long des lignes de champ. Il y a donc un mouvement ordonné d'électrons qui se superpose au mouvement d'agitation thermique et qui, en général, les fait déplacer d'un point à l'autre du conducteur. On dit que dans ce cas il y a un passage de *courant électrique*.

Analogie entre courant stationnaire et hydraulique

Nous avons déjà fait une comparaison avec l'hydraulique lorsque nous avons parlé du condensateur. Dans ce cas, nous avons comparé le condensateur à un réservoir dont le niveau varie peu par rapport aux variations de débit d'entrée et de sortie. La capacité du condensateur correspond à la capacité d'un réservoir.

Pour comprendre de nouveaux phénomènes, en physique nous nous appuyons souvent sur des analogies avec des situations déjà connues et celui-ci est l'un de ces cas. *Capacité, potentiel, courant* sont en fait des termes empruntés à l'hydraulique² car aux débuts les physiciens avaient remarqué une forte analogie entre les circuits électriques et hydrauliques.

Si les armatures d'un condensateur chargé sont connectées via un fil conducteur, après un certain temps, une décharge du condensateur est observée. Tout se passe comme si les charges positives sur une armure passaient à travers le fil conducteur sur l'armure négative, les neutralisant. Ce phénomène est assez semblable à celui d'un courant d'eau circulant dans une canalisation : les deux phénomènes portent alors le nom *courant*.

Supposons que vous ayez deux récipients remplis de liquide et que vous les reliez avec un tube. Le liquide ne pourra passer d'un récipient à l'autre que si le niveau d'origine n'est pas le même dans les deux récipients : pour avoir un passage des liquides, l'énergie potentielle du liquide dans les deux récipients ne peut pas être la même. Un courant n'est alors généré que s'il existe une *différence de potentiel* entre les deux récipients.

Si nous voulons que le courant circule indéfiniment dans le tuyau, nous avons besoin d'une pompe qui prélève le liquide du réservoir le plus bas et le pompe dans l'autre au détriment d'une certaine énergie. Dans les circuits électriques nous retrouvons la même situation et dans ce cas nous parlons de *générateur de force électromotrice*.

Par analogie avec la définition de courant en hydraulique, nous définissons *courant électrique* la quantité de charge qui traverse une section du conducteur dans l'unité de temps et il est indiqué par *I* :

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

et son unité de mesure est l'*Ampere* (A), ce qui correspond à une charge de 1 Coulomb par seconde.

1. Les vitesses sont représentées par des vecteurs orientés aléatoirement, donc leur *somme vectorielle* est nulle.
2. Et c'est aussi la raison pour laquelle, à vouloir être pointilleux, en électromagnétisme il faut ajouter l'adjectif "électrique" à ces termes. Il faut donc parler précisément de *capacité électrique, potentiel électrique* et *courant électrique*. Dans la plupart des cas, toutefois, ce terme est omis sans que cela génère confusion

Historiquement, le sens du courant électrique est supposé positif s'il passe de l'armure positive (ou pôle) à la négative, alors qu'en réalité ce sont les électrons qui se déplacent dans la direction opposée. Cela vient du fait qu'aux débuts on croyait que les porteurs de courant étaient des charges positives, alors qu'aujourd'hui nous savons que ce sont les électrons à se déplacer.

4.2 Densité de courant et équation de continuité

Considérons maintenant un conducteur à l'intérieur duquel il existe n charges électriques par unité de volume, chacun ayant une charge q . Pour les électrons, $q = -e$.

Comme nous l'avons vu, la présence d'un champ électrique externe superpose à l'agitation thermique un mouvement dont la vitesse a la même direction du champ électrique, et ayant sens concorde ou discordé au champ selon le signe de la charge. La vitesse de dérive peut donc être considérée un champ vectoriel.

Si nous faisons l'abstraction de moyenniser les mouvements chaotiques au niveau des particules, nous pouvons considérer un tube de flux généré par la surface dS , formant éventuellement un angle θ avec la vitesse. La charge dq qui dans l'unité de temps dt passe à travers de la surface dS est alors évidemment donnée par le nombre de charges contenues dans un cylindre de base $dS \cos \theta$ et de hauteur $v_d dt$:

$$dq = nq d\vec{S} \cdot \vec{v}_d dt = nq dS_n v_d dt \quad dS_n \equiv dS \cos \theta$$

La quantité de charge qui passe dans le tube de flux par unité de temps est :

$$dI = \frac{dq}{dt} = nq d\vec{S} \cdot \vec{v}_d \equiv \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

où nous avons défini le vecteur :

$$\boxed{\vec{J} \equiv nq \vec{v}_d} \quad (4.3)$$

qui représente évidemment une *densité de courant électrique* et dont les dimensions physiques se révèlent être Coulomb sur second sur mètre carré. La relation est donc valide :

$$\boxed{I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}} \quad (4.4)$$

Afin d'avoir une idée des vitesses dont nous parlons, considérons un conducteur de cuivre cylindrique de rayon 1 mm traversé par un courant de 1 A. Dans ce cas, la surface est $S = \pi r^2$ et donc :

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S} = nq d\vec{S} \cdot \vec{v}_d = nq v_d \pi r^2 \quad \rightarrow \quad v_d = \frac{I}{nq \pi r^2}$$

Nous avons déjà calculé dans §4.1 le nombre d'électrons libres dans le cuivre, environ $8,5 \times 10^{23}$ électrons / cm^3 = $8,5 \times 10^{28}$ électrons / m^3 . Par conséquent :

$$v_d = \frac{I}{nq \pi r^2} = \frac{1 \text{ A}}{8,5 \times 10^{28} \text{ électrons/m}^3 \cdot 1,16 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 3,1415 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 2,33 \times 10^{-6} \text{ m/s}$$

À titre de comparaison avec la valeur de la vitesse moyenne de l'agitation thermique, également calculé dans §4.1, nous remarquerons que même avec toutes les approximations faites, la valeur $v_d \ll v_T$ ⁽³⁾

En absence de champ électrique, en raison de l'agitation thermique, les électrons se déplacent de manière aléatoire et frappent constamment les atomes du réseau cristallin, ils sont donc en équilibre thermique avec ceux-ci.

3. Remarquons aussi qu'il s'agit d'une vitesse extrêmement faible, qui est d'environ 2 millièmes de millimètre par seconde. Comment est-il possible que lorsque vous appuyez sur un interrupteur, la lumière s'allume instantanément? Car ce qui produit l'effet est le champ électrique, qui se propage rapidement, à vitesse c . En d'autres termes, les électrons dans le conducteur commencent à bouger tous en même temps et il n'est pas nécessaire d'attendre qu'un électron se déplace réellement d'un bout du conducteur à l'autre.

Lorsque un champ électrique est présente, un électron qui sort avec une vitesse v_T d'une collision est accéléré par le champ électrique (le long de la direction du champ) et dans la collision suivante cédera l'énergie en excès. L'augmentation de vitesse due au champ électrique est exprimée par la conservation de la quantité de mouvement :⁴

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_T = \vec{a} \Delta t = \frac{\vec{f}}{m} \Delta t = -\frac{e\vec{E}}{m_e} \Delta t$$

où Δt est le temps moyen entre deux collisions. La vitesse de dérive entre deux collisions est donnée par la valeur moyenne de $\Delta \vec{v}$, à savoir $\vec{v}_d = \Delta \vec{v} / 2$, d'où :

$$\vec{v}_d = -\frac{e\vec{E}}{2m_e} \Delta t = \left(-e \frac{q}{2m_e} \Delta t \right) \vec{E}$$

Or, nous avons vu que la vitesse de dérive est beaucoup plus petite que le mouvement d'agitation thermique, donc $\vec{v}_T \approx \vec{v}_f$ et l'intervalle entre deux collisions successives (donnée par $\lambda / \Delta t$, avec λ chemin moyen libre) est sensiblement indépendante du champ électrique appliqué. Il en résulte que $\vec{v}_d \propto \vec{E}$. Cela nous permet de conclure que *le courant électrique dans un conducteur est proportionnel en norme et en direction au champ électrique appliqué*. En conséquence, la même chose peut être dite pour la densité de courant. Indiquant avec q la charge :

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d = \left[\frac{nq^2}{2m_e} \Delta t \right] \vec{E} = \left[\frac{nq^2 \lambda}{2m_e v_T} \right] \vec{E}$$

en se rappelant la (4.1) :

$$\vec{J} = \left[\frac{nq^2 \lambda}{2\sqrt{3}m_e kT} \right] \vec{E} \equiv \sigma_{\text{micr}} \vec{E} \quad (4.5)$$

Ce modèle simplifié est appelé *modèle de Drude* et a été formulé par Paul Drude en 1900.

Si le courant est transporté par différents types de porteurs, et en particulier par des porteurs positives et négatives, la densité de courant totale est évidemment donnée par la somme des deux :

$$\vec{J} = \vec{J}_+ + \vec{J}_- = n_+ q_+ \vec{v}_+ + n_- q_- \vec{v}_-$$

si on remarque maintenant qu'entre les porteurs positifs et négatifs il y a un changement de signe dans la charge et dans la vitesse,⁵ les deux contributions sont en accord, elles sont parallèle et donc s'additionnent.

Nous avons dit au début de ce cours que la conservation de la charge électrique est une loi fondamentale de la nature à laquelle aucune exception n'a jamais été trouvée. Maintenant, nous pouvons formaliser ses conséquences.

Considérons une surface S fermée dans laquelle il existe une charge $Q(t)$ à une instante donnée t . Si dans un certain intervalle de temps dt la charge à l'intérieur de la surface diminue de dQ , alors pour le principe de conservation de la charge électrique on peut dire qu'une charge dQ doit être passée à travers la surface S pendant le temps dt , ce qui revient à dire qu'un courant sortant de la surface doit s'écouler :

$$-\frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

D'autre part, nous savons que la charge électrique peut être exprimée en termes d'une densité de charge :⁶

$$Q(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(x, y, z, t) d\mathcal{V}$$

4. La variation de vitesse est le produit de l'accélération fois l'intervalle de temps, et l'accélération à travers de la $\vec{f} = m\vec{a}$. La force appliquée est donnée par le champ électrique, qui est $\vec{f} = -e\vec{E}$.

5. Les charges positives et négatives sont dirigées dans des directions opposées par le même champ électrique.

6. Et s'il s'agit de charges ponctuelles isolées, la densité sera une distribution discrète.

par conséquent, comme nous calculons le courant à travers une surface fixe :

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, y, z, t) d\mathcal{V}$$

En appliquant le théorème flux-divergence à la densité de courant, nous avons :

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}$$

et comme cette relation doit être valide pour chaque volume arbitraire il s'ensuit que les fonctions sous intégrale doivent être égales, d'où :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (4.6)$$

cette relation est appelé *équation de continuité du courant* et représente la formalisation mathématique du principe de conservation de la charge électrique.

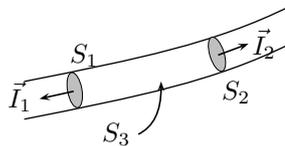
En conditions stationnaires toutes les grandeurs électriques sont indépendantes du temps, dans ce cas particulier :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

à partir de laquelle, par intégration sur un volume arbitraire :

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d\mathcal{V} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

Un champ de vecteur qui bénéficie de cette propriété est appelé *solénoïdal*. Considérons maintenant un fil conducteur, celui-ci peut être considéré lui-même un tube de flux élémentaire du fait que les vitesses v_d sont nécessairement parallèles à la surface du conducteur.⁷



En appliquant la relation (4.6) dans le cas stationnaire à ce tube de flux :

$$\int_{S_1} \vec{J} dS_1 + \int_{S_2} \vec{J} dS_2 + \int_{S_3} \vec{J} dS_3 = 0$$

Par définition, \vec{v}_d est parallèle à la surface latérale S_3 , par conséquent la contribution de la surface S_3 est nulle. Il s'ensuit :

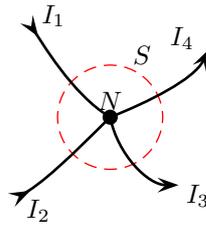
$$\int_{S_1} \vec{J} dS_1 + \int_{S_2} \vec{J} dS_2 = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = 0$$

à savoir que les courants \vec{I}_1 et \vec{I}_2 provenant des deux sections sont égaux et opposés. La direction des courants est supposée être la même pour les deux sections, alors nous pouvons établir que *en conditions stationnaires, le courant qui traverse deux sections de n'importe quel conducteur est le même.*⁸

Cette conclusion peut être généralisée au cas où plusieurs conducteurs convergent en un point N (point qui est appelé *nœud*) :

7. Cela provient directement du fait que les charges ne peuvent pas quitter le conducteur.

8. Les contributions sont opposés car la normale aux surfaces dS_1 et dS_2 sont opposés. Lors que nous considérons que concrètement le courant s'écoule toujours dans la même direction, et donc prenons le sens inversé de la normale pour l'une de deux surfaces, il s'ensuit que le courant qui traverse les deux surfaces est le même.



et en fait si nous choisissons la surface S pour calculer le flux de \vec{J} , nous avons :

$$\int_S \vec{J}_1 dS + \int_S \vec{J}_2 dS + \int_S \vec{J}_3 dS + \int_S \vec{J}_4 dS = 0$$

donc $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$. Ce résultat constitue la première loi de Kirchhoff des circuits électriques et se formule en disant que *en conditions stationnaires la somme algébrique des courants entrants et sortants dans un nœud est nulle, avec la convention que les courants soient considérés avec un signe différent selon qu'ils sont entrants ou sortants.*

Cette loi a une importance fondamentale dans la résolution des circuits électriques et *correspond à la conservation de la charge électrique.*

4.3 Résistance électrique

Bien que simplifié, notre modèle de courant électrique et en particulier le raisonnement qui nous a conduit à (4.5) nous permet de prédire que le passage du courant électrique, à savoir le mouvement des électrons dans le réseau cristallin du conducteur, est affecté par une certaine "résistance" au mouvement, principalement à cause des chocs dus à l'agitation thermique. Dans ce paragraphe, nous traiterons de façon formelle ce phénomène.

Considérons les équations (4.2), (4.4) et (4.5) :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Delta V \quad I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \vec{J} = \sigma_{\text{micr}} \vec{E}$$

et mettons-nous dans l'hypothèse selon laquelle les déplacements sont parallèles au champ électrique et les surfaces normales à la densité de courant. Les équations peuvent donc être réécrites de la façon suivantes :

$$\Delta V = El \quad \begin{cases} I = JS \\ J = \sigma_{\text{micr}} E \end{cases} \Rightarrow I = \sigma_{\text{micr}} SE$$

d'où :

$$\Delta V = El = \frac{1}{\sigma_{\text{micr}}} \frac{l}{S} I \equiv \rho \frac{l}{S} I$$

où ρ représente la *résistivité électrique* et σ_{micr} , son inverse, la *conductivité électrique*. La relation peut être écrite sous la forme :

$$\boxed{\Delta V = RI} \quad (4.7)$$

Cette relation représente la **première loi d'Ohm**, qui stipule que *dans un conducteur métallique, le courant dépend linéairement de la tension appliquée à ses bornes*. Le facteur de proportionnalité R s'appelle *résistance électrique*, se mesure en *Ohm* (indiqué avec Ω) et représente la résistance d'un conducteur provoquant une chute de 1 V lors qu'il est traversé par un courant de 1 A. Un conducteur suivant cette loi est appelé *conducteur ohmique*.

La découverte de la loi d'Ohm

La loi d'Ohm était en fait déjà connue depuis longtemps avant la formulation mathématique complète de l'électromagnétisme. George Ohm, physicien et mathématicien allemand, était convaincu de la relation de linéarité entre le potentiel et le courant en se basant sur la théorie de

la chaleur de Fourier. En 1827 il publia *Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet*⁹, où il analysa et décrit ses expériences sur la conduction des fils métalliques de différentes épaisseurs, matériaux et longueurs. En analysant le passage du courant, il formula sa loi et la description détaillée des méthodes utilisées permettra à d'autres scientifiques de répéter ses expériences. Cette loi, parmi d'autres, a contribué à l'émergence de la théorie des circuits électriques telle que nous la connaissons aujourd'hui.

Dans ce texte, nous n'avons pas considéré cette loi comme expérimentale, nous avons préféré la déduire théoriquement dans les hypothèse de validité du modèle de Drude.

Dans ce modèle, la (4.5) représente l'interprétation microscopique de la conductivité et donc de la résistivité. En termes de validité du modèle, nous pouvons donc nous attendre à ces caractéristiques :

- la loi est valide dans les cas où le nombre de porteurs n est constant et indépendant de \vec{E} . Ce n'est pas toujours le cas, par exemple pour les semi-conducteurs et les gaz raréfiés, cette hypothèse n'est pas satisfaite,
- la loi et la forme (4.5) sont valables dans l'hypothèse que $v_d \ll v_T$. Ceci est généralement le cas pour des températures ambiantes non extrêmes, cependant pour des températures proches du zéro absolu, le comportement peut changer radicalement (supraconducteurs),
- Le fait que \vec{J} soit parallèle à \vec{E} et que le facteur de proportionnalité soit indépendant de \vec{E} ne tient que dans l'hypothèse que le chemin libre moyenne λ est isotrope. Dans les matériaux homogènes et non isotropes, la relation est plus complexe et demande un *tenseur de conductivité électrique*.
- la résistivité doit augmenter avec la racine carrée de la température absolue.

Si nous prenons comme température de référence 0°C et désignant la température absolue correspondante par T_0 , nous pouvons développer la résistivité donnée par la (4.5) en série de Taylor au premier ordre autour de T_0 :

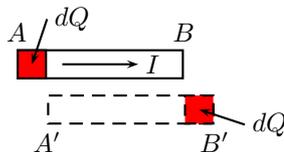
$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{2\sqrt{3m_e k T}}{nq^2 \lambda} = \frac{2\sqrt{3m_e k}}{nq^2 \lambda} \sqrt{T} \simeq \frac{2\sqrt{3m_e k}}{nq^2 \lambda} \left[\sqrt{T_0} + \frac{1}{2\sqrt{T_0}}(T - T_0) \right] = \\ &= \underbrace{\frac{2\sqrt{3m_e k T_0}}{nq^2 \lambda}}_{\varrho_0} \left[1 + \frac{1}{2T_0}(T - T_0) \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire en indiquant avec t la température en degrés Celsius :

$$\varrho = \varrho_0(1 + \alpha t)$$

où avec ϱ_0 nous indiquons la résistivité à 0° et α représente le *coefficient de température*. Cette loi est en bon accord avec les données expérimentales dans une large plage de température et compte tenu des approximations assez poussées pour dériver la (4.5), l'ordre de grandeur de la valeur de $\alpha = 1/2T_0 \approx 2 \times 10^{-3}$ est assez correct.¹⁰

Considérons maintenant un morceau de conducteur ayant extrêmes A et B entre lesquels il existe une différence potentielle ΔV et un courant stationnaire I .



9. "Le circuit galvanique démontré mathématiquement", composé à Berlin entre 1820 et 1826 et publié en 1827.

10. Des valeurs typiques sont :

Matériau	α
Fe	5×10^{-3}
Ni	6×10^{-3}
Cu	4×10^{-3}
Ag	4×10^{-3}

Le courant a pour effet de déplacer les charges contenues dans le volume $A - B$ vers le volume $A' - B'$. Le travail effectué pour déplacer ces charges est équivalent au travail effectué pour amener la charge $dQ = nq dV$ du potentiel A au potentiel B sur une distance \vec{dl} . Le champ électrostatique effectue alors un travail égal à :

$$dL = nq dV \vec{E} \cdot \vec{dl} = \vec{E} \cdot \vec{J} dV dt$$

étant donné que $\vec{dl} = \vec{v}_d dt$ et en se rappelant de la définition (4.3). Il en résulte que la *puissance par unité de volume et de temps (densité de puissance)* est donnée par :

$$w = \vec{E} \cdot \vec{J}$$

De manière similaire :

$$dL = nq dV \vec{E} \cdot \vec{dl} = dQ \vec{E} \cdot \vec{dl} = dQ \Delta V = I dt \Delta V$$

car $nq dV = dQ$ est la charge déplacée et $\vec{E} \cdot \vec{dl} = \Delta V$. La puissance est donc donnée par :

$$W \equiv \frac{dL}{dt} = I \Delta V \quad (4.8)$$

à partir de laquelle et grâce à la loi d'Ohm, les formes équivalentes $W = I^2 R = (\Delta V)^2 / R$ peuvent être obtenues.

Puisque nous sommes dans des conditions stationnaires, le travail effectué par le champ électrique (c'est-à-dire l'énergie dépensée) ne se transforme ni en énergie potentielle ni en énergie cinétique. En fait, toute l'énergie dépensée par le champ électrique est épuisée dans les chocs d'électrons avec les atomes du réseau cristallin et se transforme donc en énergie désordonnée, c'est-à-dire en énergie thermique. *En raison du passage du courant électrique, le conducteur chauffe et la (4.8) fournit la puissance dissipée en effet thermique. Cette relation s'appelle **loi de Joule**.*

D'un point de vue physique on parle de dissipation d'énergie, mais cet effet a une grande importance pratique. Il est utilisé dans de nombreuses applications qu'on retrouve tous les jours, par exemple dans les chauffe-eau, dans les plaques de cuisine électriques ou dans les ampoules dans lesquelles la chaleur générée est telle qu'un filament métallique devient incandescent.

Le résisteur

Bien que chaque conducteur résiste au passage du courant électrique, des composants électriques conçus et construits explicitement à ce fin sont extrêmement répandus. Ces dispositifs sont appelés *résisteur* ou *dipôle résistif*, bien qu'ils soient souvent appelés à tort *résistances*.¹¹ Il s'agit de composants présents en quantité dans les circuits électriques les plus différents :

- afin de limiter le courant dans certains composants ou parties du circuit. Par exemple, les LED qui nécessitent une valeur de courant spécifique. Trop bas, ils ne s'allument pas, trop haut, ils brûlent.
- pour partager une tension fixe (par exemple, l'alimentation d'un circuit),
- pour générer exprès de la chaleur,
- pour ajuster la constante de temps¹²

4.4 Force électromotrice

Nous avons défini le courant stationnaire en tant que un flux continu de charges dans un conducteur. Maintenant, nous avons également vu qu'il y a des phénomènes dissipatifs qui apparaissent au passage du courant, phénomènes impliquant une dissipation d'énergie.

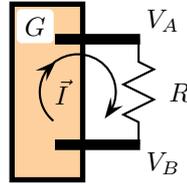
Afin d'avoir un passage de courant continu dans le conducteur, il est nécessaire donc de disposer d'une source fournissant l'énergie dissipée. En fait, l'étude systématique du courant stationnaire ne

11. Pour être pointilleux, le suffixe *-nce* indique la caractéristique physique (résistance, inductance et même capacitance), tandis que les termes suffixés *-eur* indiquent l'objet matériel (résisteur, inducteur et condensateur).

12. Ce sujet sera traité prochainement dans §4.6

fut possible qu'à partir du moment où une source d'énergie était disponible.¹³ Une telle source est appelée *générateur de force électromotrice* ou dans le langage commun *générateur de tension*. Dans le paragraphe §4.8 nous traiterons de la théorie nécessaire pour construire concrètement un tel générateur, nous aborderons ici les aspects théoriques de la force électromotrice.

Supposons un circuit simple constitué d'un générateur G connecté à une résistance R .



Pour permettre le passage d'un courant \vec{I} constant à travers de R , le générateur G doit présenter à ses deux extrémités A et B une différence de potentiel $\Delta V = V_A - V_B$ constante. Soit A l'électrode à potentiel supérieur ("positif", appelée *anode*) et B l'électrode à potentiel inférieur ("négatif", appelée *cathode*).¹⁴ Il s'ensuit que par la loi d'Ohm nous pouvons écrire :

$$V_A - V_B \equiv \Delta V = RI$$

Si le courant circule dans la résistance de A à B alors, selon la loi sur la conservation de la charge électrique, le même I doit circuler de B à A .

Dans le résisteur le courant est produit par un champ électrostatique \vec{E}_s qui, pour la convention adoptée, fait un travail positif donné par :

$$dL_{AB}^{(s)} = \int_A^B dQ \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = dQ \int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = dQ \Delta V = I \Delta V dt$$

ce travail est dissipé en énergie thermique, de sorte qu'en ce qui concerne la résistance le bilan énergétique est nul.

À l'intérieur du générateur, une charge équivalente de dQ doit être passée de B à A et le travail électrostatique sur cette charge est donné par :

$$dL_{BA}^{(s)} = \int_B^A dQ \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = dQ \int_B^A \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = -dQ \Delta V = -I \Delta V dt = -dL_{AB}^{(s)}$$

cela n'est surprenant, car si nous calculons le circuit du champ électrostatique le long du circuit, nous savons qu'il doit en résulter :

$$\oint \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0 = dL_{AB}^{(s)} + dL_{BA}^{(s)}$$

Il s'ensuit qu'à l'intérieur du générateur **doit** agir un autre champ qui fait du travail *contre* le champ électrostatique en compensant le travail négatif donné par $dL_{BA}^{(s)}$ plus ce qui est perdu par les forces dissipatives $dL^{(d)}$ à l'intérieur du générateur. Ce champ s'appelle *champ électromoteur* et doit satisfaire la relation :

$$dL^{(e)} = \int_B^A dQ \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = dL_{AB}^{(s)} + dL^{(d)} = I \Delta V dt + dL^{(d)} \quad (4.9)$$

le *champ électromoteur* représente la force **non électrostatique** par unité de charge dans le générateur. Le travail par unité de charge est donné par :

$$\frac{dL^{(e)}}{dQ} = \int_B^A \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = f$$

13. Cela fut possible pour la première fois grâce à l'invention de la pile par Alessandro Volta en 1799, qui sera discuté en détail dans le §4.8.

14. La terminologie *anode* (du grec ἀνοδος, *ánodos*, "montée") et *cathode* (du grec κάθοδος, *kátodos*, "descente") a été introduite en 1834 par Michael Faraday en électrochimie pour indiquer respectivement l'électrode de la réaction d'oxydation et de réduction. Dans les §4.8, le choix de cette terminologie sera éclairci.

où f est la *force électromotrice*.¹⁵ L'écriture en termes d'intégrale de circuit est légitime car le champ électromoteur est nul en dehors du générateur et la circulation du champ électrostatique est nul. L'écriture de la force électromotrice en termes de circulation du champ total :

$$f = \oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} \quad (4.10)$$

est en réalité plus général. La différence est importante car, comme nous le verrons, la force électromotrice peut être due à des phénomènes électromagnétiques distribués sur tout le circuit.

Dans la définition (4.10), la (4.9) peut être écrit ainsi :

$$f dQ = I \Delta V dt + dL^{(d)}$$

et en divisant par dt , on obtient l'énergie w fournie par le générateur :

$$w = fI = I \Delta V + w^{(d)} = I \Delta V + I^2 r$$

où $w^{(d)}$ est la puissance dissipée en effet Joule à l'intérieur du générateur en raison de sa *résistance interne* r . Il s'ensuit immédiatement que la relation qui lie le courant et la tension d'un générateur est la suivante :

$$I = \frac{f - \Delta V}{r} \quad (4.11)$$

Si le courant I est nul (générateur *ouvert*), la différence de potentielle ΔV à ses extrémités coïncide avec la force électromotrice f .

Comme nous l'avons vu dans le cas des conducteurs ohmiques et comme nous le verrons plus loin, nous pouvons écrire pour chaque élément de circuit une relation liant I et ΔV , qui prend le nom de *caractéristique* du composant.

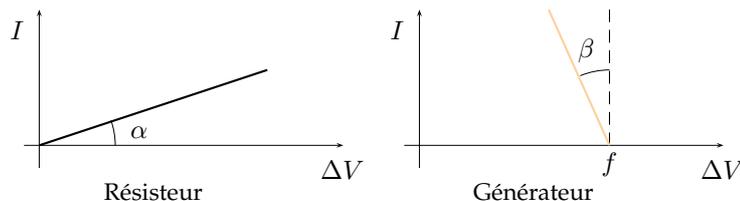
4.5 Applications de la théorie à la résolution des circuits

Lorsqu'un générateur est utilisé pour alimenter un circuit, par exemple le cas simple de la résistance vue ci-dessus, la différence de potentiel ΔV présente aux extrémités du générateur est la même que celle aux extrémités de la résistance R . En même temps, le courant I en circulation est le même dans les deux composants.

Donc, si nous voulons trouver la tension ΔV_l et le courant I_l qui circule réellement dans le circuit (on dit généralement que le circuit est "résolu"), nous devons résoudre le système constitué des deux équations (4.7) et (4.11) :

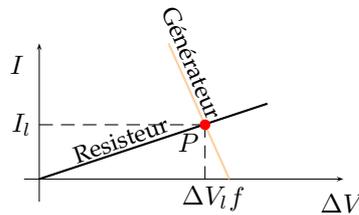
$$\begin{cases} \Delta V_l = f - I_l r \\ \Delta V_l = I_l R \end{cases} \rightarrow f = (R + r)I_l \rightarrow \begin{cases} I_l = \frac{f}{R + r} \\ \Delta V_l = f \frac{R}{R + r} \end{cases}$$

La solution de ce système peut également être trouvée graphiquement. Dans un graphe $(I, \Delta V)$, les courbes caractéristiques du générateur et de la résistance sont représentées par deux lignes droites :

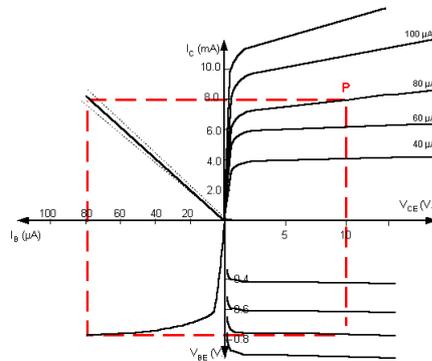


15. Pour des raisons historiques, on l'appelle *force* électromotrice, alors qu'il s'agit en réalité d'un travail par unité de charge.

où à partir de (4.7) on obtient $\tan \alpha = 1/R$ et à partir de (4.11) que $\tan \beta = r$. Pour trouver la solution du circuit, nous pouvons tracer les deux courbes caractéristiques :



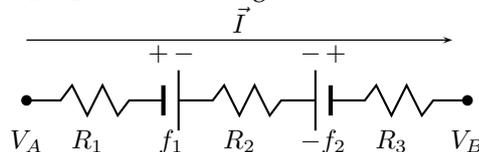
le point où se croisent les deux courbes caractéristiques s'appelle *point de travail* et correspond aux valeurs communes au générateur et à la résistance $(I_1, \Delta V_i)$, c'est-à-dire à la solution du circuit. La méthode graphique que nous venons d'illustrer ici ne doit pas être sous-estimée. Dans de nombreux cas, la résolution analytique du circuit est possible, mais il existe des cas pour lesquels la solution graphique est la seule solution possible ou celle-ci est beaucoup plus facile à trouver. A titre d'exemple et pour montrer en quoi les courbes caractéristiques de certains composants peuvent être complexes, voici ci-dessous celles d'un transistor :



Dans ces cas, le moyen le plus rapide de chercher les courants et les tensions consiste à résoudre le circuit à l'aide de la méthode graphique.

Nous remarquerons que la loi de Ohm (4.7) peut être lue comme la chute de tension entre deux points d'un circuit ayant une résistance R lorsqu'un courant I circule entre eux, à condition que le circuit entre les deux points considérés puisse être considéré un conducteur ohmique. Cela nous donne l'occasion de généraliser cette loi.

Nous définissons *branche* une partie d'un circuit électrique dans lequel il n'y a pas de nœuds. Par conséquent, tous les composants présents sur cette branche sont traversés par le même courant. La loi d'Ohm peut donc s'appliquer à tous les composants présents sur la branche, qu'il s'agisse de résistances ou de générateurs. Par exemple, supposons qu'entre les points A et B il y ait trois résistances d'une valeur de R_1, R_2 et R_3 et deux générateurs de force électromotrice f_1 et f_2 :



La loi d'Ohm nous permet d'écrire :

$$V_B = V_A - IR_1 + f_1 - IR_2 - f_2 - IR_3$$

car en passant par la branche de A à B , le potentiel diminue de IR_1 , f_1 (16), IR_2 , $-f_2$ (17) et IR_3 .

16. Car le vers est concorde de la chute de potentiel de A à B .

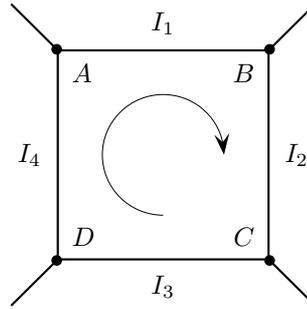
17. Car le vers est discorde avec la chute potentielle de A à B et augmente le potentiel de f_2 .

De ce fait nous pouvons écrire :

$$\Delta V + \sum_{A \rightarrow B} f_i = \sum_{\text{branche}} IR_i$$

où la somme sur les générateurs f_i est une somme algébrique. Cette relation s'appelle *loi généralisée d'Ohm*.

Considérons maintenant un ensemble de branches formant une ligne fermée. Cette configuration s'appelle *maille* :



comme dans ce cas il y a forcément des nœuds, chaque branche constituant la maille aura son propre courant. Nous fixons ensuite un sens d'écoulement du courant dans la maille.¹⁸ Nous pouvons toujours écrire la loi d'Ohm généralisée pour chaque branche :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow B \quad V_A - V_B + \sum_{A \rightarrow B} f_i = I_1 R_{A \rightarrow B} \\ B \rightarrow C \quad V_B - V_C + \sum_{B \rightarrow C} f_i = I_2 R_{B \rightarrow C} \\ C \rightarrow D \quad V_C - V_D + \sum_{C \rightarrow D} f_i = I_3 R_{C \rightarrow D} \\ D \rightarrow A \quad V_D - V_A + \sum_{D \rightarrow A} f_i = I_4 R_{D \rightarrow A} \end{array} \right.$$

et en ajoutant membre à membre nous obtenons :

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_A) = 0$$

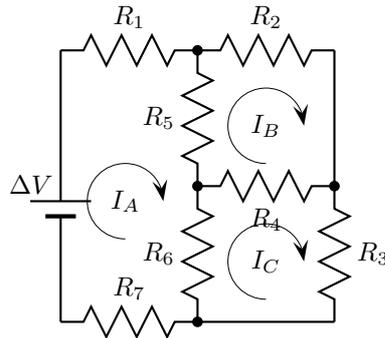
ce qui n'est rien d'autre que l'application pratique de l'équation (1.6) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, c'est-à-dire le fait que la circulation d'un champ conservatif est identiquement nulle. Il s'ensuit que le long d'une maille, nous pouvons écrire la **seconde loi de Kirchhoff** :

$$\boxed{\sum_{\text{maille}} f_i = \sum_{\text{maille}} R_i I_i}$$

Maintenant que nous avons trouvé la deuxième loi de Kirchhoff pour les mailles, les mathématiques nous aident à traiter des cas plus complexes.

Pour comprendre comment procéder, commençons par un exemple concret. Supposons d'avoir le circuit suivant :

18. Le vers de l'écoulement peut être choisi arbitrairement. Lors que le circuit sera résolu, si le signe du courant est positif, cela signifie qu'il est en accord avec le vers choisi. S'il est négatif, cela signifie qu'il s'écoule dans le sens opposé à celui choisi.



Ce circuit contient 6 branches, 4 nœuds et 7 mailles et nous pouvons certainement écrire la deuxième loi de Kirchhoff pour chacune d'elles. Nous pouvons donc écrire un système d'équations avec les lois de Kirchhoff de chaque maille et en chercher la solution. Pourquoi écrire un système d'équations ? Tout simplement, parce qu'elles doivent toutes s'appliquer simultanément.

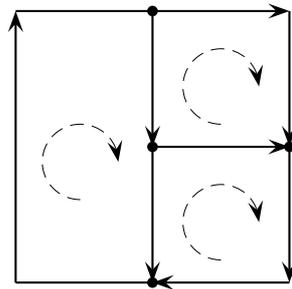
Le problème qui se pose immédiatement est que ces équations ne sont pas toutes indépendantes et donc n'a aucun sens (ni du point de vue physique, ni du point de vue mathématique) écrire un système pour toutes ces équations. Nous devons donc avant tout identifier correctement le nombre minimum de relations indépendantes nécessaires pour résoudre notre circuit et écrire la deuxième loi de Kirchhoff pour ces liens. Ce n'est qu'à ce point-là que notre système sera bien défini d'un point de vue mathématique et que nous obtiendrons la bonne solution.

Pour connaître le nombre de liens indépendants dans notre circuit, nous devons nous appuyer sur la *théorie des graphes*.¹⁹ En géométrie combinatoire, la théorie des graphes traite de l'étude des propriétés des *graphes* définis de façon non formelle comme étant une structure contenant :

- objets simples appelés *nœuds* ou *sommet*,
- *liens* (ou *arêtes*) entre nœuds pouvant être *non orientés* (c'est-à-dire avec une direction mais sans un vers) ou *orientés* (c'est-à-dire, avec une direction et un vers défini).

dans notre cas, les nœuds sont les nœuds du circuit électrique et les connexions entre les nœuds sont représentées par les branches de la maille. De plus, le circuit électrique est représenté par un *graphe orienté* car les courants définissent une direction le long des branches.

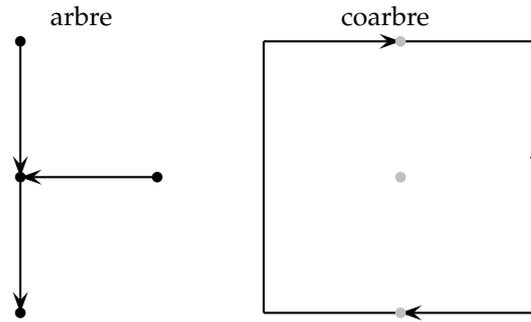
Lors que notre exemple de circuit est transposé en graphique, il se transforme de la façon suivante :



En théorie des graphes, l'*arbre* a une importance particulière : il s'agit de l'ensemble des branches qui connectent tous les nœuds sans former de chemins fermés. Les branches restantes constituent le *coarbre*.²⁰ Dans notre cas, arbre et coarbre sont :

19. Bien que la théorie des graphes ait beaucoup progressé récemment grâce à des applications de plus en plus sophistiquées, son origine est très ancienne et remonte à Euler qui en jeta les bases en 1736 en s'attaquant au problème des 7 ponts de Königsberg.

20. Ceux-ci constituent alors le *graphe complémentaire*.



si nous indiquons maintenant le nombre de nœuds avec n , il est immédiatement évident que l'arbre est composé de $n - 1$ branches. La première branche relie 2 nœuds, la deuxième branche a un nœud en commun avec la première et connecte un troisième nœud et ainsi de suite jusqu'au dernier nœud, d'où la relation. Si on dit r le nombre de branches, il en résulte immédiatement que le coarbre contient $r - (n - 1)$ branches, dans notre exemple $6 - (4 - 1) = 3$.

Notons maintenant que si nous ajoutons une branche du coarbre à l'arbre, nous créons une maille. Si, par exemple, nous ajoutons la branche supérieure droite du coarbre à l'arbre, nous obtenons la maille que nous avons identifié avec I_B . Il est évident que le nombre de mailles que nous pouvons obtenir de cette manière (**mailles essentielles**) coïncide avec le nombre de branches du coarbre, c'est-à-dire :

$$\boxed{m = r - n + 1} \quad (4.12)$$

Dans notre exemple, nous obtenons 3 mailles. La propriété importante est que *les équations de la seconde loi de Kirchhoff appliquées aux mailles essentielles sont linéairement indépendantes*, car dans chacune d'elles apparaît la tension d'une branche du coarbre qui n'est pas inclus dans les autres et ne peut donc pas être écrit comme combinaison linéaire des autres. Comme les mailles essentielles incluent toutes les branches et tous les nœuds, ceux-ci sont également suffisants pour résoudre complètement le circuit.

C'est ainsi qu'à partir de la relation (4.12) nous trouvons la règle de chercher $r - n + 1$ mailles qui ont au moins une branche non en commune avec d'autres.

Maintenant que nous avons obtenu un nombre suffisant d'équations indépendantes pour résoudre notre circuit, il est immédiat d'écrire les équations des trois mailles parcourues par les courants I_A , I_B et I_C (**courants de maille**). Pour ce faire, il faut prendre soin d'exprimer les courants latéraux en fonction des courants de maillage selon la convention utilisée :

$$\begin{cases} (R_1 + R_5 + R_6 + R_7)I_A - R_5I_B & -R_6I_C = \Delta V \\ -R_5I_A + (R_5 + R_2 + R_4)I_B & -R_4I_C = 0 \\ -R_6I_A - R_4I_B & +(R_6 + R_3 + R_4)I_C = 0 \end{cases}$$

ou en terme de matrices :

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_5 + R_6 + R_7) & -R_5 & -R_6 \\ -R_5 & +(R_5 + R_2 + R_4) & -R_4 \\ -R_6 & -R_4 & +(R_6 + R_3 + R_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En général, si nous avons m mailles essentielles, la solution du circuit s'écrit :

$$\begin{cases} \sum R_{m_1} I_{m_1} - \sum_{\substack{r=2 \\ r \neq 1}}^m R_{1,r} I_{1,r} & = \sum f_{m_1} \\ \sum R_{m_2} I_{m_2} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq 2}}^m R_{2,r} I_{2,r} & = \sum f_{m_2} \\ \dots & \\ \sum R_{m_m} I_{m_m} - \sum_{r=1}^{m-1} R_{m,r} I_{m,r} & = \sum f_{m_m} \end{cases}$$

où :

- I_{m_1}, \dots, I_{m_m} sont les courants de maille,
- $\sum R_{m_1}, \dots, \sum R_{m_m}$ est la somme de toutes les résistances présentes dans les mailles et donc parcourus par le courant de maillage,
- $R_{1,r}, \dots, R_{m,r}$ sont les résistances communes entre les mailles considérées et les contiguës traversées par les courants relatifs,
- $\sum f_{m_1}, \dots, \sum f_{m_m}$ est la somme algébrique des contributions des générateurs présents dans la maille.

Le système ainsi défini peut être résolu avec les techniques consolidées d'algèbre linéaire afin de trouver le vecteur des courants de maille. À partir de ceux-ci, les courants réels circulant dans les branches peuvent être calculés. Par exemple, le courant circulant dans la résistance R_4 sera donné par $I_B - I_C$.

4.6 Courant en régime quasi-stationnaire

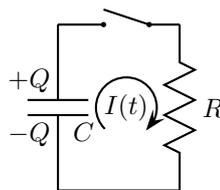
Dans ce paragraphe, nous aborderons les situations dans lesquelles les circuits ne sont pas parcourus par un courant stationnaire, c'est-à-dire un courant qui reste stable et constant dans le temps, mais dans lesquelles les valeurs des grandeurs électriques (courant, différences de potentiel) subissent des variations dans le temps tout en étant la source du courant constante dans le temps.

Nous parlerons de *conditions quasi stationnaires* et nous indiquerons avec cela le fait que les grandeurs électriques varient lentement par rapport au temps de propagation du champ électromagnétique, de sorte que les paramètres électriques puissent être considérés comme statiques même si leur valeur varie instant par instant.

Physiquement, cela revient à dire que chaque variation de ces paramètres se propage "instantanément"²¹ à chaque point du circuit.

Concrètement, cela revient à dire que les relations trouvées jusqu'à présent (par exemple la loi d'Ohm, les lois de Kirchhoff, les équations des mailles) gardent leur validité *instant par instant*, c'est-à-dire entre des valeurs instantanées de variables.

Ce qui nous intéresse ici, c'est de trouver la manière dont ces variables sont liées à des instants successifs dans le temps, à savoir leur évolution temporelle. Par exemple, pour développer le raisonnement considérons un circuit constitué d'un condensateur chargé et d'une résistance. Les deux composants sont connectés via un commutateur initialement ouvert.



21. En réalité, ils se propagent à la vitesse de la lumière, mais dans les conditions dans lesquelles nous sommes la propagation est de facto instantanée.

Sur le condensateur il y a une charge dQ qui induit une différence potentielle V_0 . Lorsque nous fermons l'interrupteur, cette différence de potentiel s'applique aux extrémités de la résistance, ce qui crée un passage de courant électrique. Ce flux de courant aura tendance à décharger le condensateur.²² Si nous indiquons alors avec $V(t)$ la chute de tension à travers de la résistance à l'instant t , nous pouvons écrire :

$$V(t) = I(t)R$$

et en se rappelant de la (2.6) :

$$\frac{Q(t)}{C} = I(t)R$$

Pendant le temps t la résistance est parcouru par une charge $I dt$:

$$-dQ = I dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{dQ}{dt} = I$$

or, le principe de conservation de la charge électrique nous dit que celle-ci doit être égal à la diminution des charge sur le condensateur :

$$\frac{Q(t)}{C} = -R \frac{dQ}{dt} \quad (4.13)$$

à savoir :

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} dt \quad \Rightarrow \quad \ln Q(t) = -\frac{t}{RC} + \text{const.}$$

d'où :

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

où évidemment Q_0 représente la charge initiale à $t = 0$. Le courant dans le circuit s'écrit alors :

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

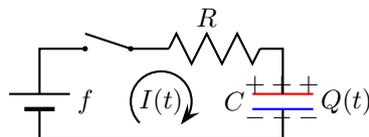
Nous voyons ici que le terme RC représente un facteur d'échelle pour la décroissance exponentielle, il en détermine *la vitesse à laquelle la charge du condensateur, et donc le courant, diminue dans le circuit*. Pour cette raison, le terme RC est dénommé *constante de temps* du circuit RC.

L'énergie dissipée en effet Joule peut être calculée en utilisant la (4.8) sous la forme $I^2 R$ et en intégrant de 0 (l'instant initial) à l'infini (où l'exponentielle sera zéro) :

$$U = \int_0^{+\infty} I^2 R dt = \frac{Q_0^2}{R^2 C^2} \int_0^{+\infty} e^{-2t/RC} dt = -\frac{Q_0^2}{2C} e^{-2t/RC} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$$

ce qui correspond exactement à l'énergie électrostatique stockée dans le condensateur.

Considérons maintenant comme deuxième exemple un circuit similaire au précédent mais avec un générateur de force électromotrice et dont le condensateur est déchargé.



en gardant à l'esprit que le condensateur se comporte comme un générateur de tension opposé au générateur de force électromoteur, l'équation de mailles s'écrit :

$$f - V(t) = RI(t)$$

22. En effet, toutes les charges négatives accumulées sur une armature peuvent se déplacer à travers la résistance pour annuler les charges sur l'armure positive du condensateur jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de charges libres.

Encore une fois, évidemment, la charge $Q(t)$ qui se trouve à l'instant t sur le condensateur est donnée par la charge qui est passée à travers de la résistance $I(t)$. Cependant, dans ce cas le flux de courant correspond à une augmentation de la charge du condensateur, donc $+dQ = I dt$. Il s'ensuit :

$$f - \frac{Q(t)}{C} = R \frac{dQ}{dt}$$

qui est encore une équation différentielle en $Q(t)$:

$$Cf - Q(t) = RC \frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\frac{d(Cf - Q(t))}{Cf - Q(t)} = \frac{dt}{RC}$$

En fait, $d(f - Q(t)) \equiv -dQ(t)$ ²³. Il en suit :

$$\ln [Cf - Q(t)] = -\frac{t}{RC} + \text{const.}$$

à savoir :

$$Q(t) = fC - Ke^{-t/RC}$$

où la constante K doit être trouvée en imposant que le condensateur soit déchargé au début, c'est-à-dire que $t = 0 \rightarrow Q = 0$. Cette condition fournit $K = fC$, la solution définitive est donc :

$$Q(t) = fC \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

On voit donc qu'au fil du temps la tension aux extrémités du condensateur tend à f alors que le courant passe à zéro :

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = f \left(1 - e^{-t/RC}\right) \quad I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -fC \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-t/RC} = \frac{f}{R} e^{-t/RC}$$

4.7 Conduction électrique dans les liquides et les gaz

Dans ce paragraphe nous aborderons la conduction électrique dans les liquides et les gaz, sujet en général très complexe. C'est précisément à cause de cette complexité que l'étude des caractéristiques de la conduction électrique dans des matériaux liquides et gazeux nous a permis de découvrir de nouvelles lois et d'étudier la structure de la matière. En fait, ces progrès remontent au 1800 lorsque l'étude de la composition et du comportement de la matière était en pleine évolution.

4.7.1 Conduction dans les liquides

Les liquides purs, tels que les huiles ou les hydrocarbures, sont des isolants. D'autres liquides, comme l'eau ou l'alcool éthylique, sont des conducteurs très faibles.

Si on dissout un acide ou un sel, par exemple du chlorure de sodium, dans de l'eau pure, celle-ci devient un excellent conducteur. Cette observation permet de conclure que la conductivité des liquides doit être associée aux ions en solution.

Prenons un vase contenant une solution saline (*électrolyte*), par exemple du chlorure de sodium, et deux conducteurs métalliques immergés dans la solution (*électrodes*) et connectés à un générateur de tension (*cellule d'électrolyse*). En établissant une différence de potentiel entre les électrodes par un générateur de tension, les ions positifs seront attirés vers le pôle négatif (cathode) et les ions négatifs vers le pôle positif (anode). Étant les ions chargés électriquement, ce mouvement ionique est en fait un mouvement ordonné de charges et donc un courant. *Ce mouvement de ions c'est ce qui génère le courant électrique à l'intérieur de la cellule d'électrolyse.*

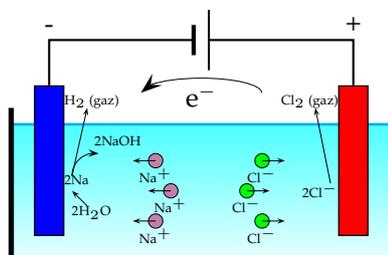
Le degré de dissociation du soluté, même en cas de solution saturée, ne dépend pas du champ électrique appliqué à la cellule.²⁴ Par conséquent, le nombre de porteurs de charge (dans ce cas, les

23. f est constante.

24. Cela est évident : si le sel électrolytique est complètement dissous, l'application du champ électrique n'en augmente pas le nombre. De même si la solution est saturée, car le pourcentage de soluté ne dépend que de la constante d'équilibre.

ions) ne dépendra pas du champ électrique. De même, la vitesse de dérive des ions est beaucoup plus faible que la vitesse d'agitation thermique,²⁵ donc les conditions de validité de la loi d'Ohm sont toujours vérifiées et nous pouvons en déduire que *une solution électrolytique satisfait la loi de Ohm*, ce qui est confirmée expérimentalement.

Ce mouvement de ions n'est pourtant pas le seul effet du flux de courant dans la solution. Reportons-nous à la figure suivante :



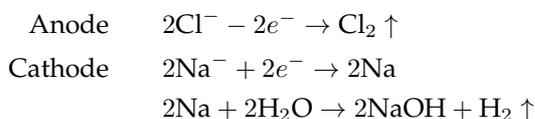
Dans un certain sens, les deux électrodes connectées au générateur de tension peuvent être considérées deux armatures d'un condensateur chargé. En conséquence, sur l'électrode chargée négativement nous trouverons un excès d'électrons, tandis que sur l'électrode positive nous aurons une réduction du nombre d'électrons qui laisseront les atomes du réseau cristallin du métal avec une charge positive non équilibrée.

De ce fait, les ions positifs attirés par la cathode recevront à l'arrivée un ou plusieurs électrons²⁶ et se transformeront en atomes neutres selon un processus de réduction chimique. De la même manière, les ions chargés négativement, une fois arrivés sur l'anode, pourront libérer leurs électrons en plus et deviendront également des atomes neutres selon un processus d'oxydation chimique. Par conséquent, tant que le courant passe à travers les électrodes, nous assistons à la formation d'atomes à partir des molécules en solution. Ce phénomène s'appelle *électrolyse*.

Petite digression sur la terminologie cathode-anode

Le comportement de la solution électrolytique décrit ci-dessus explique la terminologie utilisée : le terme grec *κάθοδος* (*kátodos*), qui signifie "descente", désigne l'électrode où les électrons "descendent" et sont mis à disposition des ions en solution. Le terme grec *ἀνοδος* (*ánodos*), qui signifie "montée", indique la place l'électrode où les électrons "reviennent" à partir des ions en solution. Plus précisément, en électrochimie, ils indiquent respectivement l'électrode de la réaction de réduction et d'oxydation.

Dans notre exemple du chlorure de sodium, nous avons les réactions :



à savoir :

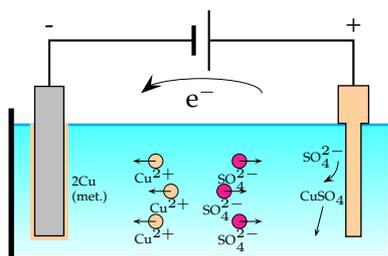
- à l'anode : deux ions chlore se combinent pour donner deux électrons et former une molécule de chlore gazeux
- à la cathode : un ion sodium acquiert un électron et devient sodium métallique. Le sodium métallique réagit fortement avec l'eau en générant de l'hydroxyde de sodium (qui reste en solution) et de l'hydrogène gazeux qui est libéré vers la cathode.

Selon le soluté, les réactions sur les électrodes peuvent être différentes, en particulier elles peuvent : 1) libérer des éléments sous forme de gaz ; 2) réagir chimiquement avec le matériau d'électrode ; 3)

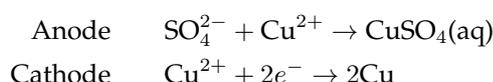
25. Principalement en raison de la mobilité beaucoup plus faible des ions dans l'eau par rapport aux électrons dans les métaux, bien que la plus grande masse de ceux-ci réduit d'environ deux ordres de grandeur la vitesse de l'agitation thermique.

26. Correspondants au nombre de valences.

se déposer sur les électrodes. Pour donner un exemple ayant des implications pratiques, considérons une solution ayant par électrolyte du sulfate de cuivre, une anode en cuivre et une cathode en un autre métal.



Dans ce cas, les réactions aux électrodes sont :



à savoir :

- à l'anode : un ion sulfate réagit avec le cuivre de la cathode, ce qui produit les deux électrons et crée du sulfate de cuivre qui revient en solution.
- à la cathode : un ion de cuivre acquiert deux électrons et prend une forme métallique qui se dépose sur la cathode.

Dans ce cas, nous pouvons observer deux effets importants : l'anode en cuivre se dissout du fait que le cuivre passe en solution à travers l'ion sulfate et que la cathode est lentement recouverte de cuivre métallique. En d'autres termes, le cuivre de l'anode passe en solution et se transforme en une couche métallique recouvrant la cathode.

Ceci est le principe de base exploité en *galvanostégie*,²⁷ une méthode largement utilisée dans l'industrie à des fins de protection si elle est faite en utilisant des métaux moins sensibles à la corrosion (*chromage*) ou d'embellissement si elle est faite à partir de plusieurs métaux précieux (*argenture* ou *dorure*).

Les lois générales qui régissent le phénomène de l'électrolyse ont été identifiées et étudiées par Michel Faraday entre 1832 et 1833. Il en vint à établir que :

1. la masse d'une substance formée à l'anode ou à la cathode d'une cellule électrolytique est proportionnelle à la quantité de charge ayant traversé la cellule (*I^{ère} loi de Faraday*) .
2. la même quantité de charge agissant sur différents électrolytes produit des masses de substance proportionnelles aux masses atomiques ou moléculaires, divisées par un entier caractéristique de chaque électrolyte (*II^{ème} loi de Faraday*).

Si nous indiquons avec z cet entier caractéristique et définissons *équivalent chimique* le rapport z/A , alors la II^{ème} loi de Faraday se formule en disant que "former un nombre de grammes d'une substance égale à l'équivalent chimique nécessite la même quantité de charge".²⁸

Supposons que chaque ion porte un nombre de charges élémentaires égal à z pour une charge totale de ze . Si n est le nombre d'ions qui ont traversé la cellule à un moment donné, la quantité de charge totale est $q = nze$. En conséquence, le nombre de transporteurs est donné par $n = q/ze$. Si maintenant nous indiquons avec m_i la masse des ions, la masse totale transportée en même temps est donnée par $m_i n = m_i q/ze$. En indiquant avec A la masse en grammes d'une mole, nous avons $m_i = A/\mathcal{N}$ avec \mathcal{N} nombre d'Avogadro. Donc :

$$m = m_i n = \frac{m_i q}{ze} = \frac{1}{\mathcal{N}e} \frac{A}{z} q = \frac{1}{\mathcal{N}e} \frac{A}{z} i \Delta t$$

De la seconde loi de Faraday, nous pouvons donc en déduire que la constante de Faraday $F = \mathcal{N}et$. Cette constante est donc le produit de deux constantes fondamentales et elle est mesurable en

27. communément appelée *placage de métaux*.

28. Cette quantité, lors qu'elle rapporté à une mole, est appelée *constante de Faraday* et vaut 96484 Coulomb.

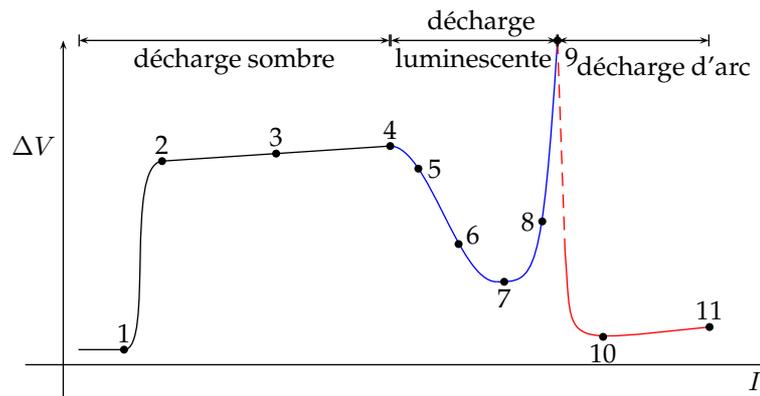
laboratoire : historiquement, c'est ainsi que, après la mesure de la constante d'Avogadro²⁹ il a été possible de calculer la valeur de e , valeur qui sera confirmée expérimentalement quelques années plus tard.

4.7.2 Conduction dans les gaz

La conduction électrique dans les gaz est un phénomène extrêmement complexe. Idéalement, un gaz en conditions ordinaires est un isolant parfait, mais en raison de la ionisation induite par des causes naturelles telles que les rayonnement cosmiques, les rayons ultraviolets et la radioactivité naturelle, il existe toujours des paires d'ions permettant la conduction électrique. Par conséquent, en conditions réelles et ordinaires un gaz est un conducteur très faible.

Le nombre de porteurs dépend donc de plusieurs facteurs externes, notamment de l'existence éventuelle d'un champ électrique. En raison de la densité relativement élevée dans les liquides ou les solides, le libre parcours moyen des électrons ou des ions est très court, par contre à cause de la faible densité le libre parcours moyen peut s'avérer être très long dans les gaz. En conséquence, alors que dans un solide ou un liquide les particules chargées sont affectés par l'accélération pendant un intervalle de temps relativement court avant de heurter une autre particule ou un atome de réseau, dans les gaz les particules chargées peuvent atteindre une vitesse (et donc une énergie) élevés et produire la ionisation d'atomes le long de leur trajet. De plus, si le champ électrique est suffisamment intense, il peut arriver à expulser les électrons périphériques d'un atome.

Il en résulte que les hypothèses sous-jacentes à la (4.7) ne sont plus valides : *les gaz ne sont pas des conducteurs ohmiques et, par conséquent, la chute de tension n'est pas proportionnelle au courant qui les traverse*. La courbe caractéristique que nous aborderons ici est valide uniquement en cas de gaz à pression atmosphérique.³⁰ Cette courbe est montrée dans la figure suivante.



Lorsque la tension appliquée change, trois régimes différents sont établis, indiqués en noir (décharge sombre), bleu (décharge lumineuse) et rouge (décharge d'arc) dans la figure précédente. Chacun de ces schémas présente quelques points caractéristiques que nous aborderons ci-dessous.³¹

DÉCHARGE SOMBRE

Dans cette région, la production de porteurs est due aux seules causes externes et leur nombre est relativement stable. Le nombre de porteurs est faible et le courant est donc également faible. Les porteurs ne se déplacent normalement pas vers les électrodes, le champ appliqué permet néanmoins à certains d'entre eux de les atteindre et le courant augmente. Au point 1, le champ est suffisant pour collecter tous les porteurs sur les électrodes et le courant n'augmente plus car il a

29. Il est intéressant de remarquer ici que Amedeo Avogadro exposa son idée entre 1809 et 1811, mais pour plusieurs raisons, notamment le fait qu'elle ne fut pas tenue en haute estime à l'époque, il ne fut jugé utile de calculer la valeur de cette constante. Pour la première vraie mesure, il faudra attendre le 1908 avec Jean Perrin!

30. Si la pression du gaz est réduite de manière significative, il en résulte une série de phénomènes différents en fonction de la valeur de la pression. Cependant, dans ce cours nous ne rentrerons pas trop dans ces détails.

31. Un excellent cours peut être trouvé à cet adresse : <https://www.slideshare.net/AmineSlama2/cours-haute-tension-claquage-des-gaz-vide>

atteint le maximum possible, compatible avec le nombre de porteurs présents (I_0 , *courant de saturation*). La région 1-2 est utilisée dans les détecteurs de particules à gaz (par exemple les tubes Geiger-Müller) car même des fluctuations importantes de la tension d'alimentation correspondent à une variation minimale, voire nulle, du courant.³² À partir du point 2 et dans la section 2-3, la tension est telle que les électrons peuvent accélérer suffisamment pour entrer en collision avec les atomes et créer de nouveaux porteurs de courant. Cela produit un effet d'avalanche pouvant être représenté quantitativement par l'équation $I = I_0 e^{\alpha d}$, avec d distance entre les électrodes et α nombre de porteurs produits par unité de temps (1^{ère} coefficient de Townsend). Dans cette région, le nombre de porteurs reste toujours proportionnel au nombre de porteurs initiales.

DÉCHARGE LUMINESCENTE

À partir du point 4, la décharge n'est plus proportionnelle aux facteurs externes mais est essentiellement déterminée par les électrons secondaires émis à proximité de la cathode. Dans cette région, la décharge devient visible sous forme de luminescence (d'où son nom). Dans la section 4-5-6, la décharge peut s'auto-entretenir et la tension s'effondre rapidement en raison d'une augmentation du courant. Dans cette zone, la tension est donc indépendante du courant et une petite région de la cathode est affectée par l'émission d'électrons. Dans la région 7-8, l'émission d'électrons implique toute la région de la cathode et le courant devient approximativement proportionnel à la tension.

DÉCHARGE D'ARC

Dans la région 9-10, l'émission d'électrons de conduction a lieu directement dans la cathode par effet thermoionique; la cathode, en raison des collisions avec les ions positifs, s'échauffe au point d'émettre spontanément des électrons. L'augmentation massive des électrons entraîne une chute de tension soudaine et une augmentation importante du courant.

4.8 Générateurs de force électromotrice

Dans §4.4, nous avons vu qu'il est nécessaire d'avoir un champ électromoteur différent du champ électrostatique afin d'avoir un générateur de force électromotrice et de compenser les forces de dissipation présentes dans le circuit. L'une des manières possibles de générer le champ électromoteur consiste à exploiter l'énergie chimique.

Une cellule électrochimique conçue pour convertir l'énergie chimique en énergie électrique est appelée *cellule galvanique* ou *cellule voltaïque*. Le point important est que, contrairement à la cellule électrolytique discutée dans le paragraphe précédent, les processus chimiques sont ici *spontanés* et ne nécessitent pas de courant extérieur pour se développer. Pour comprendre comment cela se produit, il faut faire une petite digression.

4.8.1 Théorie

L'*énergie libre de Gibbs* (ou *enthalpie libre*) est une fonction d'état thermodynamique utilisé pour représenter l'énergie libre dans les transformations isothermobariques, c'est-à-dire à pression et température constantes (comme c'est le cas pour la plupart des réactions chimiques) et qui détermine la spontanéité ou moins d'une réaction. Cette fonction d'état permet de déterminer le travail utile pouvant être obtenue à partir d'un système fermé³³ non dû à expansion mécanique et dans une transformation à pression et température constantes. Il constitue donc l'équivalent en thermodynamique de l'énergie potentielle mécanique. En d'autres termes, le système tend à la configuration qui minimise l'énergie libre de Gibbs.

32. Une discussion approfondie de cet argument nous mènerait trop loin, il suffit de dire que dans un détecteur le courant est proportionnel à l'énergie libérée par les particules incidentes. Par conséquent, dans cette région, une variation de la tension d'alimentation n'affecte pas l'amplitude du signal de courant en faussant la mesure.

33. Rappelez-vous que nous définissons ainsi un système dans lequel il est possible d'échanger de la chaleur et du travail avec l'extérieur, mais pas de matière.

L'énergie libre de Gibbs est définie de la façon suivante :

$$G(T, p, n) = H - TS$$

le théorème de Clausius pour une transformation réversible affirme que :

$$dQ \leq TdS$$

où Q est la chaleur échangée par le système et T , la température à laquelle elle est échangée. Dans des conditions isothermobariques, la chaleur dQ peut être écrite en terme de l'enthalpie H , pour laquelle :

$$dH \leq TdS \rightarrow dH - TdS \leq 0 \rightarrow dH - d(TS) = d(H - TS) \equiv dG \leq 0$$

autrement dit, pour un processus spontané (inégalité de Clausius), l'énergie libre de Gibbs diminue.

Remarquons maintenant que l'énergie de Gibbs, grâce à la définition de l'enthalpie $H = U + pV$, peut être écrite sous la forme $G = U + pV - TS$. Nous voulons maintenant calculer la valeur du travail utile L_u pour une transformation réversible. Le travail mis à disposition par la transformation est :

$$dL = \delta L_u + pdV$$

Pour le premier principe de thermodynamique, la variation d'énergie interne U est donnée par :

$$dU = dQ_{\text{rev.}} - \delta L_u - pdV$$

et qui grâce au théorème de Clausius, $dQ_{\text{rev.}} = TdS$ peut être réécrit comme suit :

$$dU = TdS - \delta L_u - pdV$$

De la définition de $G = U + pV - TS$, nous obtenons $dG = dU + pdV + Vdp - dS - SdT$ et nous y substituons la nouvelle expression dU trouvée :

$$dG = TdS - \delta L_u - pdV + pdV + Vdp - TdS - SdT$$

et comme les transformations considérées ont lieu à température et pression constantes $dG = -\delta L_u$: le travail utile coïncide donc avec la variation d'énergie libre de Gibbs.

Nous pouvons donc en conclure que si nous choisissons pour électrodes et électrolytes des éléments et des ions ayant une affinité chimique élevée, qui auront donc tendance à se recombiner avec une diminution de l'énergie libre de Gibbs G , le changement $dG \leq 0$ fournira un travail utile $\delta L_u = -dG$ qui peut être utilisé pour générer un champ électromoteur et avoir par conséquent un générateur de force électromotrice.

L'énergie libre de Gibbs peut être facilement associée à la différence de potentiel développée par la réaction car, en réalité, le travail produit à l'extérieur du système par l'énergie chimique est un travail électrique.³⁴ Mais la différence de potentiel électrique est un travail par unité de charge, le travail effectué est donc donné par la différence de potentiel ΔV_e fois la charge totale. En termes de mole chimique, la charge qui passe dans une cellule voltaïque est donnée par le nombre n de moles d'électrons échangés dans la réaction ce qui, avec le fait qu'une mole d'électrons a une charge équivalente à la constante de Faraday $F = 96485 \text{ C}$, permet de conclure que :

$$-\Delta G = nF\Delta V_e$$

où V_e représente le potentiel d'électrode.

Il est intéressant de noter que ΔG peut également être exprimé par $\Delta G = -RT \ln K_{eq}$, c'est-à-dire qu'il dépend de la constante d'équilibre de la réaction. En conséquence, la différence de potentiel développée ne dépend que du type de réaction de red-ox choisi :

$$\Delta V_e = \frac{RT \ln K_{eq}}{nF}$$

34. Et cela parce qu'il déplace des charges électriques, et c'est le seul travail qui a lieu dans ces conditions.

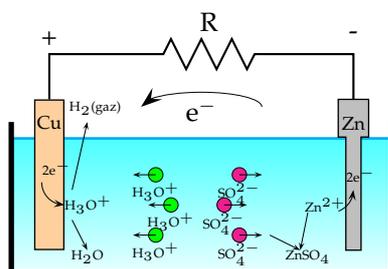
C'est la base théorique pour construire une pile ou une batterie.

Pour appliquer ce principe à la pratique, il faut trouver une configuration permettant d'intercepter le flux d'électrons des réactions d'oxydoréduction qui se produisent au niveau des électrodes. Ce flux est celui qui, opportunément canalisé, génère un courant continu dont la différence de potentiel dépend des réactions qui se produisent en solution.

Pour montrer comment cela se fait concrètement, nous étudierons en profondeur le premier modèle de pile inventé par A. Volta,³⁵ ensuite nous étudierons la "pile Daniell", pour décrire finalement très brièvement les différents types de piles actuellement disponibles.

4.8.2 Pile de Volta

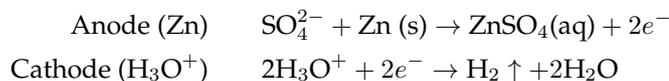
Considérons deux électrodes, une en cuivre et l'autre en zinc, immergées dans une solution aqueuse d'acide sulfurique.



En solution, l'acide sulfurique $\text{H}_2\text{SO}_4^{2-}$ se dissocie en ions hydroxonium H_3O^+ (³⁶) et en ions sulfate SO_4^{2-} . En raison de leur affinité chimique, les ions sulfate se dirigent vers l'électrode de zinc et ils lui cèdent deux électrons, ce qui forme du sulfate de zinc ZnSO_4 qui passe en solution. L'électrode de zinc est alors chargée d'électrons (anode)³⁷ et il a tendance à se corroder.

Les électrons mis à disposition par le zinc ne réagissent pas avec le cuivre, mais avec l'ion H_3O^+ qui se divise ainsi en une molécule d'eau et d'hydrogène gazeux. Si la cellule n'est pas fermée sur une résistance externe, les réactions ont lieu dans la solution d'électrolyte et aucun effet n'est visible à l'extérieur. Cependant, si un résisteur est connectée aux deux électrodes *Les électrons mis à disposition sur l'anode en zinc traverseront la résistance, descendront sur l'électrode en cuivre et seront mis à la disposition des ions hydroxonium. Mais cela correspond simplement à un passage de courant électrique dans la résistance.* Bien qu'elle soit identifiée comme une cathode, l'électrode de cuivre ne participe pas vraiment aux réactions,³⁸ elle ne sert qu'à créer la différence de potentiel. La vraie cathode est constituée d'hydrogène qui, une fois que l'électron est acquis, se libère sous forme gazeuse à l'électrode de cuivre.

Les réactions aux électrodes sont donc :



Le potentiel de référence dans les réactions red-ox étant celui de l'hydrogène, le ΔV_e développé par cette cellule correspond à celui de la réaction $\text{Zn(s)} \rightarrow \text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + 2e^-$, à savoir $-0,762 \text{ V}$. L'électrode de zinc est donc le pôle négatif de la batterie et l'électrode de cuivre est le pôle positif.

35. Curiosité historique : en 1801, le scientifique italien Alessandro Volta présenta sa nouvelle invention à Napoléon Bonaparte. Il l'appela "électromoteur" (depuis sa signification physique), mais elle fut ensuite connue sous le nom de *pile*, un terme encore utilisé aujourd'hui, qui rappelait sa structure composée de disques de zinc et de cuivre et de tissu imbibé d'acide, montés l'un sur l'autre.

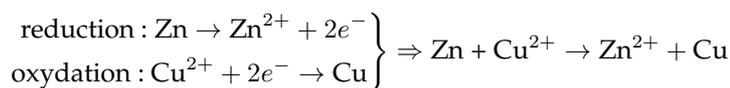
36. Rappelons que l'ion H^+ (un proton) n'existe pas à l'état libre, mais il est associé à une molécule d'eau.

37. Le zinc se comporte comme une anode même s'il est chargé négativement car le zinc donne des électrons. Le comportement est donc inverse par rapport à l'électrolyse.

38. Celui-ci est donc appelé *électrode inerte*. En réalité, l'électrode de cuivre peut être soumise à des phénomènes d'oxydation.

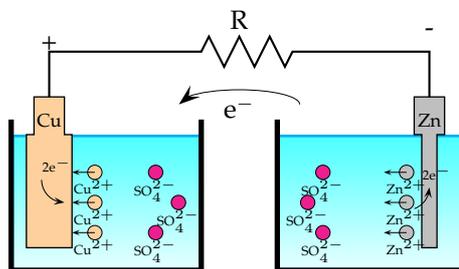
4.8.3 Pile de Daniell

En 1836, John Frederic Daniell se basa sur la pile de Volta pour apporter des améliorations en termes de tension, de technique et de sécurité. En particulier, l'un des problèmes de la batterie de Volta est que l'hydrogène gazeux qui se développe sur l'électrode de cuivre a tendance à être adsorbé dans le réseau cristallin jusqu'à interrompre le passage du courant (*polarisation de la pile*). Daniell garda les électrodes de cuivre et de zinc, mais décida d'exploiter une réaction différente ne produisant pas d'hydrogène et réfléchit à la réaction de oxydoréduction spontanée :



Pour que cette réaction se produise, il faut insérer les électrodes de zinc et de cuivre dans une solution respectivement de sulfate de zinc et de sulfate de cuivre.³⁹ Si ces sulfates sont dissous dans la même solution, la réaction d'oxydoréduction se déroule rapidement, mais les électrons rendus disponibles par le zinc passent directement au cuivre en solution dans un espace microscopique et par conséquent la différence de potentiel produite par les réactions ne peut être exploitée. *Il est donc nécessaire de séparer physiquement la cellule contenant l'électrode de cuivre avec son sulfate de celles contenant l'électrode de zinc avec son sulfate et d'intercepter le flux d'électrons à travers d'un conducteur métallique externe.*⁴⁰

Si nous connectons l'électrode de zinc à l'électrode de cuivre via un conducteur métallique, le zinc aura tendance à s'oxyder, perdant deux électrons et passant en solution avec le sulfate. Les deux électrons traversant le conducteur métallique seront disponibles sur l'électrode de cuivre. Les ions de cuivre sont attirés par les électrons (chargés négativement) et se transforment à travers une demi-réaction de réduction en cuivre métallique qui se dépose sur la cathode. Tout cela se traduit par un passage d'électrons du zinc au cuivre en passant par le résisteur, autrement dit il y aura un courant électrique qui circule de la cathode de cuivre à l'anode de zinc.



Cette configuration illustre bien le principe de base du fonctionnement d'une pile électrolytique, en particulier le fait qu'il n'est en principe pas nécessaire que les deux solutions soient en contact pour produire un passage de courant électrique. Mais cette configuration présente un problème. Lorsque les ions de zinc passent en solution et que les ions de cuivre se déposent sur la cathode, les deux solutions perdent leur électroneutralité. La cellule anodique a tendance à se charger positivement ($[\text{Zn}^{2+}] > [\text{SO}_4^{2-}]$) et la cellule cathodique a tendance à se charger négativement ($[\text{Cu}^{2+}] < [\text{SO}_4^{2-}]$). Concrètement, cela signifie que les électrons doivent s'éloigner d'une solution positive pour passer à une solution négative, surmontant l'attraction à l'anode et la répulsion à la cathode. La perte d'électroneutralité des solutions génère donc un potentiel électrique opposé à celui généré par les réactions d'oxydoréduction. Lorsque ce potentiel est égal à l'original, les électrons ne bougent plus⁴¹ et la batterie est dite *déchargée*.

Pour éviter ce désagrément, un mécanisme est nécessaire pour préserver la neutralité électrique des solutions. L'idée est d'ajouter des charges négatives dans la cellule anodique pour com-

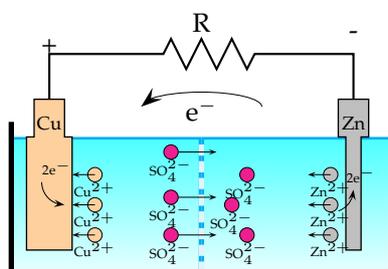
39. C'est pourquoi on dit souvent – de façon impropre – que dans la pile Daniell la réaction est $\text{Zn} + \text{CuSO}_4 \rightarrow \text{ZnSO}_4 + \text{Cu}$.

40. Si les deux cellules restent séparées, évidemment rien ne se passe et les deux sulfates restent séparément en solution.

41. Le champ électrique est annulé.

penser la dissolution du zinc et des charges positives dans la cellule cathodique pour compenser la disparition des ions cuivre.

Pour ce faire, nous pouvons notamment insérer un septum poreux qui nous permettra de mettre en contact les solutions sans les mélanger et qui laissera passer les ions négatifs, mais pas les positifs.⁴²



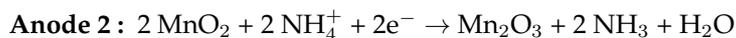
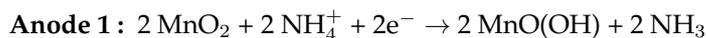
De cette manière, les ions cuivre et zinc restent confinés dans les cellules respectives, mais les ions sulfate chargés négativement (qui peuvent migrer à travers le septum poreux) peuvent se déplacer dans la cellule d'oxydation au fur et à mesure que le potentiel augmente pour compenser la présence d'ions zinc positives. Les cellules restent ainsi électriquement neutres et la réaction peut continuer.

Étant le potentiel standard de réduction de la réaction $\text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Zn}(\text{s})$ égal à $-0,762 \text{ V}$ et celui de la réaction $\text{Cu}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Cu}(\text{s})$ est $0,34 \text{ V}$, la différence de potentiel développée par la pile de Daniell est de $1,1 \text{ V}$.⁴³

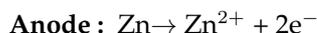
4.8.4 Modèles principaux de batteries modernes

Après avoir étudié le fonctionnement des piles Volta et Daniell, nous décrivons brièvement les principaux types de batteries actuellement disponibles sur le marché.

Pile Zinc-carbone. Elle a été breveté en 1886 par Carl Gassner sur un projet de Leclanché. Ce sont les piles courantes que l'on peut trouver sous différentes formes (AA, AAA de $1,5 \text{ V}$, PP3 de 9 V , 1206 de $4,5 \text{ V}$, ...). Il s'agit de *pile sèche*. L'anode est composée d'un cylindre de zinc servant également de récipient et d'un barreau en graphite servant de cathode inerte séparée par une pâte de dioxyde de manganèse et de chlorure d'ammonium. Les réactions impliquées sont les suivantes :

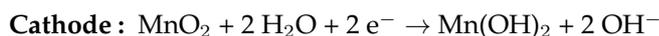


Pile alcaline. Elles représentent la version moderne des piles zinc-carbone. L'oxydant et l'agent réducteur sont toujours le dioxyde de manganèse et le zinc métallique, mais le zinc ne forme plus le récipient extérieur étant inséré sous forme de poudre autour d'un barreau de métal inerte (anode). L'oxyde de manganèse est également une poudre en contact avec le récipient externe inerte (cathode) métallique. Les deux poudres d'oxyde de zinc et de manganèse sont immergées dans une pâte alcaline gélatineuse d'hydroxyde de potassium (KOH) à fonctions électrolytiques et sont séparées par un septum laissant passer les ions, mais pas les deux substances solides pulvérisées. Les réactions sont les suivantes :



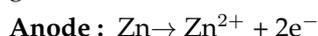
42. Un septum poreux peut être fait, par exemple, avec de la porcelaine sans vernis. Une autre façon de mettre les cellules en communication consiste à utiliser un *pont de solution saline*, qui est une sorte de tube contenant une solution d'un sel fort fermé aux extrémités par une membrane perméable.

43. Le potentiel de la réaction $\text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Zn}(\text{s})$ est $-0,762 \text{ V}$, donc celle de la réaction $\text{Zn}(\text{s}) \rightarrow \text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^-$ qui a lieu dans la cellule est $+0,762$. La référence des standards de réduction potentielle est prise en relation avec la réaction de réduction.



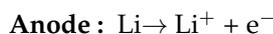
avec une réaction complète $\text{Zn} + \text{MnO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{ZnO} + \text{Mn}(\text{OH})_2$.

Pile oxyde d'argent. Ce sont les pile en forme de bouton couramment utilisées dans les montres, calculatrices, appareils photo et autres petits appareils électroniques. La base supérieure de la batterie est occupée par une plaque de métal inerte qui joue le rôle d'anode, tandis que la base inférieure et la paroi latérale sont constituées d'une plaque de métal inerte similaire qui fonctionne de cathode. Au contact des bases supérieure et inférieure de la batterie, il y a deux pâtes alcalines gélatineuses à base d'hydroxyde de potassium et contenant une poudre de zinc et une poudre d'oxyde d'argent, respectivement. Celles-ci sont séparées par un septum poreux qui assure le rétablissement de la neutralité dans les deux environnements gélatineux. Les réactions sont :

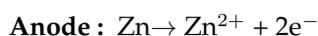


Il est à noter que la présence d'argent les rend relativement coûteuse.

Pile au lithium. Inventé et commercialisé en 1970 par plusieurs sociétés américaines et japonaises, elles sont généralement en forme de bouton et maintenant utilisées dans les montres, appareils photo, calculatrices, télécommandes, dispositifs chirurgicaux (par exemple, les stimulateurs cardiaques), plusieurs articles électroniques. La base inférieure de la batterie est constituée d'une plaque en métal inerte jouant le rôle d'anode, tandis que la base supérieure est constituée d'une plaque de métal inerte similaire qui constitue le cathode. La base inférieure est en contact avec une ou plusieurs couches de lithium immergées dans un solvant organique. La base supérieure est au contraire en contact avec un composé oxydant qui peut varier en fonction du type de batterie. Dans 80% des batteries au lithium existantes sur le marché l'oxydant est le dioxyde de manganèse et le solvant est le carbonate de propylène où est dissous le sel électrolyte LiClO_4 . Les réactions sont les suivantes :⁴⁴



Pile Zinc-air. La première pile zinc-air a été construite par Charles Féry en 1914. Aujourd'hui, elles ont la taille et la forme d'un bouton et sont utilisées par exemple dans les appareils auditifs. La base supérieure est constituée d'une plaque de métal inerte qui joue le rôle d'anode. Celui-ci contient une pâte alcaline gélatineuse humide à base d'hydroxyde de potassium et contenant de la poudre de zinc. La plaque métallique de la cathode est perforée au niveau de la base inférieure pour laisser passer l'oxygène de l'air qui est en fait la vraie cathode. Les réactions sont :



44. La réaction à l'anode présente le potentiel de réduction standard le plus faible en absolu (-3,04 V), si bas que les ions H^+ présents dans l'eau ou dans tout solvants organiques (même dans un environnement alcalin) réagiraient de manière explosive avec le lithium métallique, ce qui se traduirait par la formation d'ions Li^+ et de gaz hydrogène H_2 . La production d'hydrogène est dangereuse pour deux raisons : il est hautement inflammable et la production de gaz a tendance à faire exploser les batteries. C'est la raison pour laquelle la solution d'électrolyte de la pile doit nécessairement être dissous dans un solvant organique aprotique.

Magnétostatique dans le vide

5.1 Principes phénoménologiques. Force de Lorentz

Comme les phénomènes électriques, les phénomènes magnétiques étaient déjà bien connus dans la Grèce antique. En particulier, il était connu qu'une pierre particulière appelée λίθος Μαγνήτις, *lithos Magnētis* (pierre de Magnésie)¹ avait la propriété d'attirer la poussière ou de petits morceaux de fer. Cependant, ces observations n'étaient considérées que des simples bizarreries, principalement parce qu'il n'existait aucun système organique permettant de les expliquer.²

Les premières études systématiques sur les forces magnétiques eurent lieu au Moyen Âge. Pierre de Maricourt³ en 1269 écrivit un manuscrit où il résumait les connaissances de l'époque en matière de magnétisme, introduisit le concept de *pôle nord* et *pôle sud* d'un aimant et proposa l'expérience de l'aimant brisé. C'est à peu près dans cette période que l'on remarque trois aspects du magnétisme :

- un aimant très fin en forme d'aiguille a toujours tendance à s'aligner le long du nord géographique de la Terre. Cette propriété a été utilisée (même sans savoir pourquoi) pour construire des *boussoles*, ce qui a grandement facilité la navigation en mer ;
- chaque aimant présente deux "entités" semblables aux charges électriques, qui sont appelées - en référence au comportement de la boussole - *pôle nord* et *pôle sud*. L'origine de cette terminologie est intéressante. Pierre de Maricourt travailla un morceau de magnétite pour lui donner la forme d'une sphère. Il plaça ensuite une aiguille magnétique sur cette sphère, pris note de sa position et il fit cela pour différentes positions tout le long la surface de la sphère. C'est alors qu'il découvrit que les lignes tracées sur la sphère sont des cercles qui entourent le minéral de la même manière que les méridiens du globe et disposés de manière à ce que l'aiguille pointe vers le pôle nord et le pôle sud de la sphère. Frappé par cette analogie, Pierre de Maricourt proposa d'appeler les deux points sur la magnétite *pôles* de l'aimant ;
- si on coupe un aimant à plusieurs reprises, nous obtiendrons toujours un nouvel aimant qui aura un pôle nord et un pôle sud. Contrairement aux charges électriques, *il n'est donc pas possible d'avoir les deux pôles d'un aimant séparément, ils vont toujours ensemble.*

Les forces magnétiques ont toujours été considérées comme totalement distinctes des forces électriques, pour deux raisons principales : *il n'existait aucune explication raisonnable à ces phénomènes et il n'y avait aucune observation permettant de lier les deux forces.* Toutes les études menées se basaient sur le principe selon lequel il s'agissait de deux phénomènes distincts et indépendants.

En 1820, l'étude du magnétisme subit un changement radical.

En préparant une leçon, Hans Christian Ørsted découvrit quelque chose qui le surprit beaucoup : en s'approchant d'une boussole magnétique avec un fil électrique dans lequel circulait un

1. *Magnesia ab Syplum* était une ancienne ville de l'Asie Mineure située au pied du mont Sipilo, où l'on pouvait trouver l'un des plus anciens gisements de magnétite.

2. Il semble cependant que le philosophe et scientifique Archimède de Syracuse ait tenté d'exploiter ce phénomène en essayant de magnétiser les épées de l'armée de Syracuse afin de désarmer plus facilement l'ennemi.

3. Connu sous le nom latinisé de *Petrus Peregrinus*.

courant il remarqua que l'aiguille magnétique de la boussole se déplaçait. Il en fut tellement surpris qu'il répéta l'expérience. Il réalisa un circuit avec un fil conducteur aligné à la direction nord-sud déterminée par les pôles géographiques. Sous le fil, il plaça l'aiguille magnétique qui se déplaça spontanément dans le même sens que le fil. Il remarqua que, dès qu'il ferma le circuit le courant passait dans le conducteur, l'aiguille magnétique déviait dans sa direction et si le courant fourni était de forte intensité la direction devenait perpendiculaire à celle du fil. Cette expérience lui permit de conclure qu'un courant électrique génère un champ magnétique dans l'espace environnant et que les lignes de champ magnétique sont perpendiculaires à la direction du courant.

Tout juste une semaine après cette première expérience, André-Marie Ampère comprit que si un conducteur sous tension engendrait un champ magnétique, ce même champ devait affecter un conducteur. Il prit ensuite deux câbles parcouru par un courant et en mesura la force de l'un sur l'autre, notant que si les courants étaient en accord les fils étaient attirés, et s'ils étaient en désaccord les fils étaient repoussés.⁴ Il put ensuite établir expérimentalement la loi de Ampère, que nous trouverons de manière formelle dans §5.6 :

$$\vec{F} \propto \frac{I_1 I_2}{r} l \cdot \hat{r}_{12}$$

Sur la base de l'expérience de Ørsted, qui démontra l'influence d'un courant électrique sur une aiguille magnétique, Faraday démontra l'année suivante qu'un champ magnétique génère une force sur un fil traversé par un courant électrique. Il arrangea un fil entre les pôles d'un aimant et remarqua qu'il se déplaçait perpendiculairement à soi-même et perpendiculairement aux lignes du champ magnétique, selon la règle dite *de la main droite* : si le pouce indique la direction du courant et l'index la direction du champ magnétique, la direction de la force qui fait bouger le fil est celle qui sort de la paume de la main.

Ces expériences ont permis de conclure qu'un fil traversé par un courant électrique génère autour de soi un champ \vec{B} appelé **induction magnétique** qui dépend de la position autour du fil et du courant qui le traverse et qui génère une force sur un conducteur en proximité exprimé par :

$$\boxed{d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}} \quad (5.1)$$

qui prend le nom de *deuxième loi de Laplace*.

De relations (4.3) et (4.4) nous pouvons écrire :

$$I d\vec{l} = \vec{J} dS dl = nq \vec{v}_d dS dl = dN q \vec{v}_d$$

où $dN = n dS dl$ est le nombre de porteurs par unité de volume. Remplacé dans la (5.1), elle nous permet d'écrire :

$$d\vec{F} = dN q \vec{v}_d \times \vec{B}$$

par conséquent, la force ressentie par une charge de type q se déplaçant avec vitesse \vec{v} dans un champ de flux magnétique \vec{B} est donnée par :

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}} \quad (5.2)$$

Si dans la région de l'espace considérée un champ électrique agit aussi bien qu'un champ magnétique, la force à laquelle la charge est soumise est exprimée par :

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})} \quad (5.3)$$

Plusieurs remarques peuvent être faites concernant cette loi.

- La force de Lorentz dépend de la vitesse de la particule, qui à son tour dépend du système de référence. Puisque la charge électrique est un invariant qui ne dépend pas de la vitesse et ne peut pas changer d'un système de référence à un autre et on peut en dire autant de la valeur de la force, il en résulte que le champ électrique et le champ d'induction magnétique doivent se transformer par changement de système de référence.

4. La définition opérationnelle de l'Ampère en tant qu'unité de mesure est donné de cette façon : en mesurant la force qui s'exerce entre deux conducteurs traversés par un courant. Nous y reviendrons plus tard.

- Une charge à repos n'est soumise à aucune force magnétique, lorsqu'elle se déplace elle est affectée par une force toujours perpendiculaire au déplacement. Par conséquent, *la force de Lorentz ne fait pas de travail*.⁵
- La découverte par Ampère de la relation entre le courant et les forces magnétiques met en relation deux phénomènes jusque-là considérés comme distincts, renvoyant tous les deux à une manifestation de charges électriques. C'est un premier pas vers l'unification complète des forces électriques et magnétiques dans une entité unique, le champ électromagnétique.
- Les expériences de Faraday et Ampère ont mis en évidence les effets magnétiques liés aux courants, mais en réalité ils ne disent rien des interactions magnétiques entre les aimants. A partir du constat que les lignes du champ d'induction magnétique d'une boucle de courant sont très similaires à celles générées par un aimant, l'hypothèse fut émise que des courants circulaires microscopiques étaient présents dans la matière. Aujourd'hui, nous savons que l'intuition d'Ampère était correcte.⁶ Cependant, à cette époque-là les outils mathématiques et les expériences de laboratoire manquaient pour pouvoir avancer plus.

L'unité de mesure du vecteur \vec{B} peut être déduite à partir de la (5.2) :

$$B = \frac{N \cdot s}{C \cdot m} = \frac{CE \cdot s}{C \cdot m} = \frac{CV \cdot s}{Cm \cdot m} = \frac{V}{m^2} s = \frac{Wb}{m^2} \equiv T$$

où avec Wb nous indiquons le *Weber*, correspondant au produit $V \cdot s$ et l'unité de mesure du champ d'induction magnétique est le *Tesla*. Le Tesla est une grande unité, c'est pourquoi son sous-multiple *Gauss* est souvent utilisé : $1T = 10kG$. Exprimé en Gauss, le champ magnétique terrestre est d'environ $0,5G$.

5.1.1 Applications pratiques de la force de Lorentz

Dans cette section, nous illustrons quelques applications directes de la force de Lorentz.

Considérons d'abord une particule de masse m et charge q , ayant une vitesse v_0 immergée dans un champ magnétique \vec{B} perpendiculaire à un plan donné Σ .

La particule est affectée par la force (5.2) et, comme elle ne fait pas de travail, le module de la vitesse v_0 reste inchangé. La force de Lorentz est orthogonale au vecteur \vec{B} , elle se situe donc toujours dans le plan Σ . Le mouvement de la particule est donc soumis à une force de module constante et toujours perpendiculaire à la vitesse, elle se comporte par conséquent comme une accélération centripète et génère un mouvement circulaire uniforme dont l'accélération est donnée par :

$$a_l = \frac{F}{m} = \frac{qv_0B}{m}$$

d'autre part dans un mouvement circulaire uniforme s'applique la relation $a = v_0^2/R$, à partir de laquelle :

$$\frac{v_0^2}{R} = \frac{qv_0B}{m} \quad \rightarrow \quad R = \frac{mv_0}{qB}$$

Une particule chargée dans un champ d'induction magnétique effectue un mouvement circulaire dont le rayon est directement proportionnel à la masse et à la vitesse de la particule et inversement proportionnel à la charge et à l'intensité du champ d'induction magnétique .

Si la vitesse de la particule forme un angle θ avec le vecteur induction magnétique, seule la composante de la vitesse perpendiculaire au champ contribuera à la force de Lorentz :

$$\vec{F}_l = qv_0 \times \vec{B} \quad \rightarrow \quad |\vec{F}_l| = qv_0B \sin \theta$$

5. Rappelons-nous que le travail est défini $\vec{F} \cdot d\vec{s}$, c'est-à-dire la projection de la force le long du déplacement. Étant la force de Lorentz perpendiculaire au déplacement, sa projection est toujours nulle.

6. Pour anticiper, il s'agit des courants générés par le mouvement des électrons autour de l'atome et des courants de spin. Nous reviendrons plus en détail sur ce sujet dans le chapitre §6.

tandis que la composante parallèle au champ d'induction magnétique $v_0 \cos \theta$ reste inchangée. La particule décrit alors un mouvement circulaire dans le plan perpendiculaire à \vec{B} dont les caractéristiques sont :

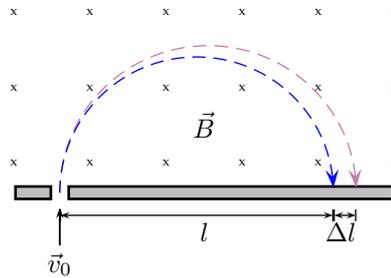
$$R = \frac{mv_0 \sin \theta}{qB} \quad T = \frac{2\pi R}{v_0 \cos \theta} = \frac{2\pi m}{qB}$$

et d'un mouvement linéaire uniforme avec une vitesse de $v_0 \cos \theta$ parallèle à \vec{B} . En conséquence, le mouvement total est un mouvement hélicoïdal de rayon R autour de la direction du champ \vec{B} et dont le pas est donné par :

$$p = v_0 \cos \theta \cdot T = \frac{2\pi m}{qB} v_0 \cos \theta$$

SPECTROMÈTRE DE MASSE

Considérons l'apparat en figure.⁷



Un faisceau de particules ayant une même vitesse \vec{v}_0 et une même charge q se dirige perpendiculairement à un plan et passe à travers une fente. Dans la région supérieure de ce plan, il existe un champ d'induction magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire au plan et à la direction du faisceau de particules. Après avoir parcouru un demi-cercle, une particule de masse m retombera sur le plan à la distance :

$$l = \frac{2mv_0}{qB}$$

une espèce légèrement plus lourde, ayant une masse $m + \Delta m$ arrivera à la distance :

$$l + \Delta l = \frac{2(m + \Delta m)v_0}{qB}$$

par conséquent, les deux particules de masse m et $m + \Delta m$ heurteront le plan en deux points séparés par une distance :

$$\Delta l = \frac{2(m + \Delta m)v_0}{qB} - \frac{2mv_0}{qB} = \frac{2v_0}{qB} \Delta m = \underbrace{\frac{2mv_0}{qB}}_l \frac{\Delta m}{m}$$

c'est-à-dire que le décalage en pourcentage de l est égal à la différence en pourcentage en masse m , $\Delta l/l = \Delta m/m$. Ce phénomène est à la base du *spectromètres de masse*, un instrument qui permet de mesurer les masses, de séparer les ions et d'indiquer le pourcentage de composition en isotopes d'un échantillon.

ACCÉLÉRATEURS CIRCULAIRES DE PARTICULES

Le fait que des particules chargées dans un champ d'induction magnétique effectuent des orbites circulaires peut être exploité pour accélérer les particules dans un *accélérateur circulaire* ou *synchrotron*. Ce type d'accélérateur est constitué par une chambre toroïdale dans laquelle le vide est appliqué. La force centripète pour maintenir les particules sur une orbite circulaire est donnée

7. Ici et dans la suite, nous allons utiliser la convention graphique pour représenter le champ magnétique entrant dans la feuille avec un "x" et le champ sortant avec un ".".

par un champ d'induction magnétique perpendiculaire au plan du tore et l'accélération est donnée par un champ électrique positionné à des points particuliers le long de la trajectoire. Lorsque la quantité de mouvement mv augmente, le champ B doit augmenter en conséquence pour que les particules restent stables sur le rayon de l'accélérateur $R = mv/qB$.

Bien sûr les détails techniques sont énormément plus complexes, mais le principe de fonctionnement théorique repose sur l'exploitation de la force de Lorentz.

5.2 Champ \vec{B} généré par des courants stationnaires

Avant de pouvoir discuter des propriétés mathématiques du champ d'induction magnétique, nous devons toujours approfondir la relation entre les courants électriques stationnaires et le champ \vec{B} .

Nous avons vu que l'expérience de Øersted l'avait amené à conclure qu'un fil sous tension engendrait un champ d'induction magnétique autour de lui. De nombreuses expériences menées sur des circuits à courant stationnaire nous ont permis d'établir *expérimentalement* que :

- $d\vec{B} \perp d\vec{l}$, à savoir que le champ est perpendiculaire à l'élément du circuit ;
- $d\vec{B} \perp \Delta\vec{r}$, à savoir que le champ est perpendiculaire au vecteur direction joignant l'élément du circuit au point P de l'espace où nous calculons le champ ;
- $d\vec{B} \propto 1/r^2$;
- $d\vec{B} \propto I$, à savoir le champ est proportionnel au courant passant dans le circuit ;
- $d\vec{B} \propto d\vec{l}$, à savoir le champ est proportionnel à la longueur du circuit qui le génère ; ;
- $d\vec{B} \propto \sin \theta$, à savoir le champ est proportionnel au sinus de l'angle formé par l'élément du circuit et la direction de P

il s'ensuit que le différentiel du champ d'induction magnétique peut s'écrire :

$$d\vec{B} = kI \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}$$

où $d\vec{l}$ est l'élément infinitésimal du circuit, $\Delta\vec{r}$ le vecteur distance de l'élément $d\vec{l}$ du point P où nous calculons le champ \vec{B} et I le courant qui traverse le circuit. Dans le système MKS, la constante a la forme :

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad \mu_0 = 1.25663706144 \times 10^{-6} \frac{H}{m}$$

μ_0 s'appelle *perméabilité magnétique du vide*⁸ et elle est mesurée en H/m, où 1 H (Henry) = 1 $\Omega \cdot s$.

Cette loi s'écrit donc (*Loi de Biot et Savart* ou *1ère loi de Laplace*) :

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}} \quad (5.4)$$

La loi de Biot et Savart est bien sûr une extrapolation faite à partir d'observations sur des circuits finis, auquel cas il est nécessaire d'intégrer sur la longueur du circuit :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l I \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \quad (5.5)$$

Si nous avons à faire à des circuits non filiformes, hypothèse faite implicitement dans le raisonnement précédent, le courant doit être exprimé à travers la (4.4), à savoir $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \oint_l \left[\left(\int_S \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' \right) \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \right]$$

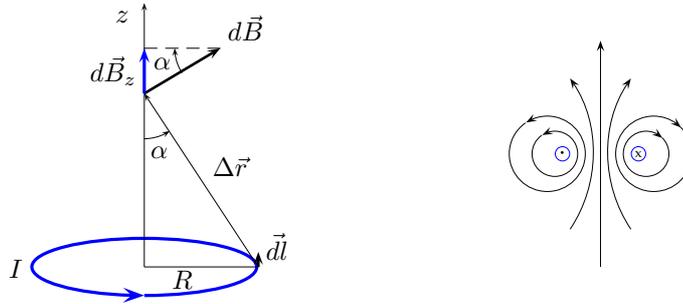
8. Ou *perméabilité du vide* ou encore *constante magnétique*.

Si on remarque que $d\vec{S} \cdot d\vec{l}$ correspond au volume \mathcal{V} occupé par le circuit, l'intégrale peut être réécrite comme suit :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} d\mathcal{V} \quad (5.6)$$

L'équation (5.5) ou la (5.6) représente la *loi fondamentale de la magnétostatique*, d'où tous les phénomènes peuvent en être dérivés.

Considérons maintenant une spire circulaire de rayon R et parcourue par un courant I .



Considérons un système de référence ayant l'axe z orienté le long de l'axe de la spire. L'élément de circuit $d\vec{l}$ est toujours perpendiculaire à $\Delta\vec{r}$, et pour chaque contribution à $d\vec{B}$ provenant de $d\vec{l}$ il en existe une autre de signe opposée provenant de l'élément diamétralement opposé à $d\vec{l}$. Les composantes perpendiculaires à z ont donc un signe différent et s'annulent, tandis que celles parallèles à z se somment. En conséquence, le champ magnétique est dirigé le long de l'axe de la spire. Pour obtenir l'expression explicite, il est nécessaire d'intégrer sur tous les éléments $d\vec{B}$, en tenant compte de la (5.5) :

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \hat{n} \oint d\vec{B}_z = \hat{n} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \sin \alpha \frac{dl}{|\Delta\vec{r}|^2} = \hat{n} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{|\Delta\vec{r}|^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{|\Delta\vec{r}|^2} 2\pi R \hat{n}$$

et en prenant en compte que $\sin \alpha = R/\Delta\vec{r}$ et $\Delta\vec{r} = \sqrt{R^2 + z^2}$:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{\sqrt{(R^2 + z^2)^3}} \hat{n} \quad (5.7)$$

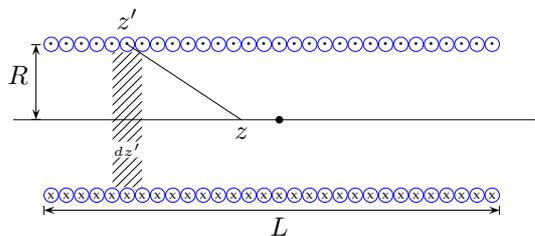
La valeur au centre de la spire est :

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} \hat{n}$$

La tendance qualitative des lignes du champ d'induction magnétique est indiquée à droite de la figure précédente.

Ce résultat est intéressant car il nous permet de calculer le champ d'un *solénoïde*, c'est-à-dire une bobine constituée d'une série de spires circulaires très rapprochées réalisées à partir d'un seul fil conducteur et donc parcourues par le même courant.

Soit L la longueur du solénoïde, N le nombre de tours (spires) et I le courant qui le traverse. Choisissons l'origine des coordonnées au centre du solénoïde.



Le nombre de spires par unité de longueur est $n = N/L$. Ainsi, dans un élément dz' , il y a $dN = ndz'$ spire qui contribuent au courant total avec $dI = nIdz'$.⁹

En indiquant avec z la position le long de l'axe du solénoïde et avec z' la position de l'élément de solénoïde, le champ magnétique généré par une portion infinitésimale de solénoïde le long de z peut être calculé à l'aide de la (5.7) et en gardant à l'esprit que la distance de l'élément de solénoïde du point z s'exprime ($z' - z$) :

$$dB_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 dI}{[R^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} IR^2 \frac{ndz'}{[R^2 + (z' - z)^2]^{3/2}}$$

Afin d'obtenir le champ dans le point z il faut intégrer sur toute la longueur du solénoïde, à savoir $-L/2 < z' < L/2$:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} InR^2 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{[R^2 + (z' - z)^2]^{3/2}}$$

Cette intégrale est facilement résolue en substituant la variable $z' - z \rightarrow y$ ($dz' \rightarrow dy$) :

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} InR^2 \int_{-L/2-z}^{L/2-z} \frac{dy}{[R^2 + y^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} InR^2 \left[\frac{y}{R^2 \sqrt{R^2 + y^2}} \right]_{-L/2-z}^{L/2-z}$$

ou, en d'autres termes :

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} In \left[\frac{L/2 - z}{\sqrt{R^2 + (L/2 - z)^2}} + \frac{L/2 + z}{\sqrt{R^2 + (L/2 + z)^2}} \right]$$

ce qui pour $z \ll L$, c'est-à-dire vers le centre du solénoïde, fournit :

$$B_z = \mu_0 In \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}}$$

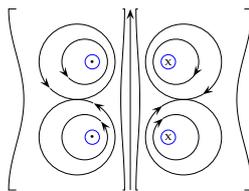
Si par contre $R \ll L$, c'est-à-dire dans le cas où la longueur est grande par rapport au rayon, nous obtenons :

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} In \left[\frac{L/2 - z}{\sqrt{R^2 + (L/2 - z)^2}} + \frac{L/2 + z}{\sqrt{R^2 + (L/2 + z)^2}} \right] \xrightarrow{R \ll L} \\ \frac{\mu_0}{2} In \left[\frac{L/2 - z}{\sqrt{(L/2 - z)^2}} + \frac{L/2 + z}{\sqrt{(L/2 + z)^2}} \right] = \frac{\mu_0}{2} In [1 + 1]$$

d'où le champ à l'intérieur du solénoïde :

$$B_z \simeq n\mu_0 I \quad (5.8)$$

Pour bien comprendre ce qui arrive au champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur d'un solénoïde, examinons ce qui se passe lorsqu'on met deux bobines côte à côte, mais sans contact :



9. Cela parce que l'intégrale sur toutes les spires doit nous fournir le courant total dans le solénoïde.

La figure montre clairement que :

- Les différentes contributions du champ \vec{B} se somment à l'intérieur du solénoïde, car elles sont toutes concordées,
- Les contributions des spires s'annulent dans l'espace entre les spires, car il y a deux contributions égales et opposées provenant des deux spires voisines,
- Les contributions en dehors du solénoïde ont tendance à s'annuler, car des contributions discordantes dans la zone externe tendent à s'annuler.

par conséquent, nous pouvons affirmer que *le champ à l'extérieur d'un solénoïde est presque nul et s'annule en cas d'un solénoïde de longueur infinie. En revanche, à l'intérieur du solénoïde le champ est très intense et aligné dans l'axe.* Cela est intuitif parce que les lignes du champ induction magnétique sont fermées, par conséquent le même nombre de lignes de champ doivent traverser le solénoïde et être dans tout l'espace extérieur, donc leur densité à l'intérieur du solénoïde doit être très élevée.

Solénoïdes et inducteurs

L'élément de circuit qui implémente un solénoïde s'appelle *inducteur*. L'inducteur est donc cet élément d'un circuit électrique qui stocke l'énergie électrique absorbée dans un champ magnétique.

Cependant, l'intérêt d'un inducteur est plutôt relatif pour les courants stationnaires. Afin d'illustrer le potentiel énorme de cet élément de circuit, nous devons donc attendre un peu plus longtemps lorsque nous parlerons de champs magnétiques variables et de flux magnétiques liés à un circuit.

5.3 Propriétés du vecteur induction magnétique

Le champ d'induction magnétique \vec{B} présente des différences notables par rapport au champ électrique \vec{E} . Alors que le flux du champ électrique sortant d'une surface fermée n'est généralement pas nul grâce au théorème de Gauss, l'observation expérimentale a montré que les lignes de force du champ d'induction magnétique sont toujours des lignes fermées, il en résulte que le flux de \vec{B} à travers toute surface fermée est toujours nul.

De même, alors que le champ électrique est conservatif et que, par conséquent, sa circulation est nulle il n'en va pas de même pour le champ d'induction magnétique car la force de Lorentz n'est pas une force radiale centrale.

Considérons donc la (5.5) :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l I \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}$$

et calculons-en la divergence, en supposant le courant constant :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \vec{\nabla} \cdot \oint_l \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_l \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \right]$$

Basé sur la relation mathématique qui relie deux vecteurs dérivables :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (\vec{\nabla} \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}_2)$$

et avec l'identification $\vec{v}_1 = d\vec{l}$ e $\vec{v}_2 = \Delta\vec{r}/|\Delta\vec{r}|^3$, nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \vec{\nabla} \cdot \oint_l \left[\frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} (\vec{\nabla} \times d\vec{l}) - d\vec{l} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \right) \right] \equiv 0$$

Cette relation est identiquement nulle car :

1. $\vec{\nabla} \times d\vec{l} = 0$. En effet, $d\vec{l}$ représente le différentiel des coordonnées du circuit, qui sont sous le signe de l'intégrale cyclique. La divergence du vecteur d'induction magnétique est calculée sur les coordonnées de l'espace, qui sont différentes de $d\vec{l}$. Par conséquent, tous les dérivés sont nulles.

2. $\vec{\nabla} \times \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|^3} = 0$ parce que c'est le terme $\frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|^3}$ que nous avons vu ((1.13) et (1.14)) pouvant être exprimés sous la forme d'un gradient : $\frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|^3} = \nabla \left(-\frac{1}{|\Delta \vec{r}|} \right)$ et le rotationnel d'un gradient est identique à zéro.

La seconde considération peut sembler triviale, mais en réalité nous verrons qu'elle ne l'est pas si tant que cela. Il est donc utile de voir pourquoi le rotor d'un gradient est identique à zéro. Considérons un vecteur générique \vec{A} :¹⁰

$$\begin{aligned} \nabla \vec{A} &= \left(\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial z} \right) \\ \vec{\nabla} \times (\nabla \vec{A}) &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Si le champ vectoriel défini par \vec{A} appartient à \mathbb{C}^2 , c'est-à-dire à la classe de fonctions pouvant être différenciée deux fois, les dérivées mixtes sont égales par le théorème de Schwartz. Par conséquent, le rotationnel d'un gradient est identique à zéro. Nous pouvons donc écrire (*deuxième équation de Maxwell*) :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad (5.9)$$

La divergence de \vec{B} et le monopôle magnétique

Il est temps de réfléchir à ce que nous avons trouvé.

Physiquement, le fait que la divergence de \vec{B} soit nulle exprime le fait qu'il n'y a pas de charges source du champ magnétique. Un champ vectoriel à divergence non nul implique en fait qu'il existe au moins un point pour lequel le flux a une variation, c'est-à-dire que la quantité associée au champ subisse une "compression" ou une "dilatation". C'est en effet exactement ce qui se passe au voisinage d'un "puits" ou d'une "source".¹¹ Dire que $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ signifie donc dire que le champ électrique a une "source", identifiée par sa densité.

Le fait que $\nabla \cdot \vec{B} \equiv 0$ signifie donc qu'il n'y a pas de monopôle magnétique équivalent aux charges électriques. Cette conclusion découle de (5.5), qui est établie sur base expérimentale, plus les deux relations 1) et 2) énumérées ci-dessus. Quelle serait alors la conséquence de l'existence de monopôles magnétiques sur l'équation (5.9)? La conséquence la plus évidente serait une symétrie parfaite dans les équations de Maxwell, ce que l'on peut déjà voir dans les deux équations rencontrées :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho E}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_M$$

Cependant, ce résultat implique que l'une des hypothèses faites pour atteindre l'équation (5.9) n'est pas correcte. La relation 1) reste évidemment valable puisqu'elle découle simplement du fait que les variables d'intégration et de dérivation ne sont pas les mêmes. Nous avons donc deux possibilités :

- La loi de Biot-Savart (5.4), et par conséquent la (5.5), n'est pas valide. Cette relation dérive de l'expérience, nous serions donc obligés de conclure que la (5.5) n'est pas une loi exacte. L'ensemble de l'apparat théorique construit à partir de cette relation ne serait donc pas correct en principe, mais seulement une approximation. Le point clé est que de cette relation découle la théorie du champ électromagnétique et par conséquent le QED (qui en représente la version quantique) et que ces théories sont vérifiées à un niveau de précision extraordinaire.¹² Il est difficile d'admettre que ces théories ne sont pas correctes.
- la relation 2) n'est pas valable, donc les hypothèses d'applicabilité du théorème de Schwarz ne s'appliquent pas. Les hypothèses de validité de ce théorème sont :

10. Les composants du rotationnel sont donnés par :

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

11. C'est ainsi que les points où la divergence est négative ou positive sont indiqués. C'est encore une fois un rappel à l'hydrodynamique. Pour information, les opérateurs *divergence*, *gradient* et *rotationnel* ont été introduits pour décrire avec précision le comportement des fluides.

12. Environ une partie sur 10^{-7} .

1. $\vec{B} \in \mathcal{C}^2$, à savoir le champ doit être deux fois dérivable,
2. chaque dérivée mixte doit être continue,
3. le champ est défini sur un ensemble ouvert connecté. Un espace topologique est dit connecté s'il ne peut pas être représenté comme l'union d'au moins deux ensembles ouverts qui ne sont ni vides ni disjoints. De manière plus intuitive, on peut dire que la connexion est la propriété topologique d'un ensemble d'être formé d'une seule pièce.

Dans ce cas, le vecteur \vec{B} ne pourrait pas être dérivé ou serait défini dans des zones d'espace non connectées les unes aux autres¹³

Cependant, certains modèles théoriques plus ou moins récents prédisent l'existence de monopôles magnétiques, par exemple la théorie des cordes ou certains modèles de grande unification. Dirac, en 1931, a montré que l'existence d'un monopôle magnétique impliquait la quantification de la charge électrique, ce qui est en fait observé.¹⁴ Pour cette raison, malgré l'absence de preuves expérimentales, la question de l'existence de monopôles magnétiques est toujours considérée une question ouverte.

Les annonces récentes concernant la découverte de monopoles magnétiques¹⁵ doivent cependant être placées dans le bon contexte. Sans rentrer dans les détails, qui sont extrêmement complexes, nous pouvons dire que dans ces cas là il s'agit de phénomènes collectifs de mouvement d'électrons ou d'atomes qui montrent des effets émergents se comportant globalement *comme si* étaient des monopoles magnétiques ou qui peuvent être décrits mathématiquement *comme* de particules. Ces phénomènes ne doivent pas être confondus avec les véritables monopoles magnétiques dont nous parlons ici. En fait, pendant ces expériences le flux microscopique de \vec{B} et par conséquent sa divergence sont toujours nuls.

De nombreuses recherches visant à révéler l'existence de véritables monopoles magnétiques¹⁶ continuent à donner des résultats négatifs. Aucun événement associé à des monopoles magnétiques n'a jamais été révélé jusqu'à présent, ce qui nous a permis d'établir la limite supérieure pour leur existence de $5.6 \times 10^{-15} \text{ cm}^{-2} \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

Comme nous l'avons anticipé, le théorème de flux-divergence nous permet de conclure que le flux de \vec{B} à travers toute surface fermée est nul :

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

cette relation nous permet de déduire une propriété importante du champ \vec{B} . Considérons la figure suivante.

13. Que se passerait-il alors physiquement au champ magnétique dans des zones n'appartenant pas à l'ensemble de définition ?

14. Mais attention : la quantification de la charge électrique *n'implique pas* l'existence de monopoles magnétiques.

15. Par exemple :

— V. Pietilä, M. Möttönen, *Creation of Dirac Monopoles in Spinor Bose-Einstein Condensates*, **Phys. Rev. Lett.** **103**, 030401 (17/07/2009) (DOI : 10.1103/PhysRevLett.103.030401)

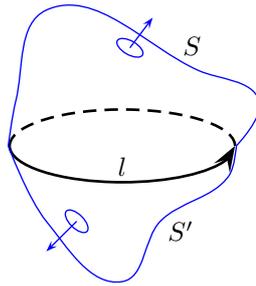
— M.R.Way *et al.*, *Observation of Dirac monopoles in a synthetic magnetic field*, **Nature** **vol.505**, 657-660, 30/01/2014 (DOI :10.1038/nature12954)

16. Par exemple :

— The MoEDAL collaboration, *Search for magnetic monopoles with the MoEDAL prototype trapping detector in 8 TeV proton-proton collisions at the LHC*, **J. High Energ. Phys.**, **2016** :67, 10/08/2016, (DOI : [https://doi.org/10.1007/JHEP08\(2016\)067](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2016)067))

— The MoEDAL collaboration, *Search for magnetic monopoles with the MoEDAL forward trapping detector in 2.11 fb⁻¹ of 13 TeV proton-proton collisions at the LHC*, 05/01/2018, **arXiv :1712.09849v3** (non ancora sottomesso a JHEP)

— The ANTARES collaboration, *Search for relativistic magnetic monopoles with five years of the ANTARES detector data*, **J. High Energ. Phys.**, **2017** :54, 12/07/2017 (DOI : [https://doi.org/10.1007/JHEP07\(2017\)054](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2017)054))

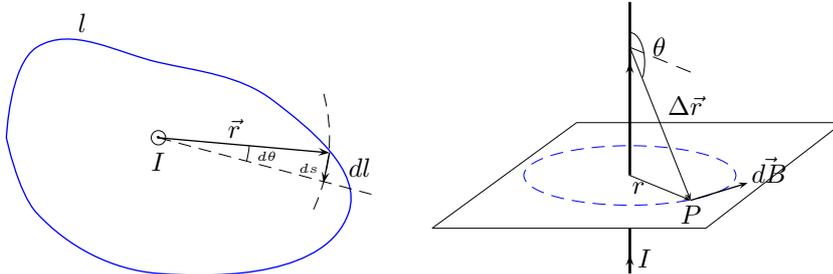


Si le flux à travers une surface fermée est nul, il en résulte évidemment :

$$\Phi_S(\vec{B}) + \Phi_{S'}(\vec{B}) = 0 \rightarrow \Phi_S(\vec{B}) = -\Phi_{S'}(\vec{B})$$

c'est-à-dire que le flux traversant deux surfaces ayant le même bord l orienté de manière discordante est égal et opposé. Si vous modifiez l'orientation d'une surface le flux change de signe, par conséquent, le flux de \vec{B} à travers deux surfaces quelconques ayant le même bord et la même orientation est égal. Il est donc possible de parler simplement d'un **flux concaténé à un bord**. Un champ vectorielle bénéficiant de cette propriété est dit être *solenoidale*.

Considérons maintenant le circuit dans le cas où la ligne contient un fil de courant. Afin de simplifier le calcul, nous considérons une ligne suffisamment proche du conducteur pour pouvoir le considérer rectiligne dans la région considérée. Grâce à la figure de droite, nous allons donc d'abord calculer le champ d'induction magnétique généré par un fil droit parcouru par un courant constant I .



Considérons l'équation (5.5) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta r|^3}$$

Nous voyons dans cette relation qu'en raison du produit vectoriel, chaque portion élémentaire $d\vec{l}$ du circuit fournit une contribution parallèle au plan perpendiculaire au fil et perpendiculaire également à direction joignant $\Delta\vec{r}$ du fil avec le point générique P . Au vu de la symétrie cylindrique, toutes les contributions $d\vec{B}$ sont en accord et disposées de manière circulaire dans le plan perpendiculaire à $d\vec{l}$ et, par conséquent, les lignes de champ sont circulaires autour du fil. Les lignes sont orientées selon la règle de la main droite : si le pouce indique la direction du courant, le champ \vec{B} suit la direction des autres doigts.

En effectuant le produit vectoriel, la forme du champ \vec{B} s'écrit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta r|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \theta}{|\Delta r|^2} dl$$

en introduisant maintenant la variable angulaire ϕ définie par $\phi = \theta - 90^\circ$ (17) et étant r le rayon

17. Cette variable correspond à l'angle entre le vecteur $\Delta\vec{r}$ et la surface perpendiculaire au fil conducteur. Si nous considérons la ligne Δr comme une transversale coupant deux lignes parallèles dont une est le rayon r , les angles $\widehat{r \Delta\vec{r}}$ et $\theta - 90^\circ$ sont alternes internes.

de la circonférence, nous avons :

$$\sin \theta = \cos \phi \quad dl = r \tan \phi \quad dl = \frac{r}{\cos^2 \phi} d\phi \quad \Delta r = \frac{r}{\cos \phi}$$

substituant dans l'intégrale :¹⁸

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r}{\cos^2 \phi} \frac{\cos^2 \phi}{r^2} \cos \phi d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} 2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{t} \quad (5.10)$$

où \hat{t} est le verqueur tangent au cercle de rayon r passant par P . Ce résultat dépend uniquement du courant I et donc a une validité générale. Par conséquent, en calculant la circulation le long de la ligne l dans la figure de gauche, nous pouvons légitimement utiliser ce résultat :

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_l \frac{1}{r} \hat{t} \cdot d\vec{l}$$

à partir de la définition de \hat{t} , le produit scalaire $\hat{t} \cdot d\vec{l}$ représente la projection du segment de ligne $d\vec{l}$ sur la circonférence définie par le verqueur \hat{t} et de rayon r , par conséquent $\hat{t} \cdot d\vec{l}/r \equiv ds/r$ correspond à l'angle $d\theta$ sous-tendu par l'élément de ligne dl vu par le fil électrique. Il s'ensuit donc :

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_l d\theta$$

l'intervalle d'intégration de cette intégrale doit permettre l'intégration sur toute la ligne, soit entre 0 et 2π :

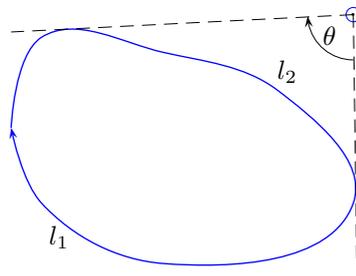
$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_l d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi = \mu_0 I$$

Si la courbe est concaténée plusieurs fois autour du fil (c'est-à-dire si la courbe "se roule" plusieurs fois autour du fil), l'intégrale ne doit plus être faite entre 0 et 2π , mais entre 0 et $n2\pi$ où n représente le nombre de "tours" que la ligne l fait autour du fil :

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_l d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2n\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2n\pi = n\mu_0 I$$

n s'appelle *dégré de concaténation*.

Considérons maintenant le cas dans lequel la ligne l ne contient aucun fil parcouru par le courant. Dans ce cas, l'intégrale curviligne peut être divisée en deux parties, comme le montre la figure suivante :



En utilisant le même procédé que dans le cas précédent, nous avons :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{l_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\underbrace{\int_0^\theta d\theta'}_{l_1} + \underbrace{\int_\theta^0 d\theta'}_{l_2} \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\theta - 0 - \theta + 0) = 0$$

18. les limites d'intégration iront de $-\pi/2$ à $\pi/2$ car de cette manière l'angle ϕ peut couvrir tout le fil de $-\infty$ à $+\infty$.

en fait, la direction des deux lignes de la ligne l_1 et l_2 est discordante.¹⁹ En cas de plusieurs conducteurs, grâce au principe de superposition nous savons que chaque conducteur contribuera à la circulation avec un terme nm_0I . En conséquence, la valeur de la circulation du champ d'induction magnétique dans le cas général est donnée par :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum_i n_i \mu_0 I_i \quad \begin{cases} n_i = \text{dégrée de concaténation du conducteur } i\text{-ème} \\ I_i = \text{courant du conducteur } i\text{-ème} \end{cases} \quad (5.11)$$

où les courants doivent être pris avec le signe positif ou négatif selon qu'ils voient la ligne l circuler dans le sens anti-horaire ou dans le sens horaire, respectivement.

Le fait que la circulation du champ \vec{B} ne soit pas défini de manière unique ne doit pas être surprenant. En fait, nous savons que le champ d'induction magnétique n'est pas conservateur.²⁰ Et, par conséquent, le travail effectué dépend du chemin choisi.

Nous voulons maintenant formuler cette propriété de \vec{B} sous forme locale. Pour ce faire, supposons que nous n'avons qu'un seul I et considérons toute surface S avec la ligne l comme frontière. Dans cette situation, la surface S intercepte le fil parcouru par le courant I une fois. Supposons que S soit orienté de manière à voir le bord circulaire dans le sens anti-horaire, de sorte que le courant I sera positif.

À partir de la définition (4.4) de densité de courant, nous pouvons alors écrire :²¹

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de Kelvin-Stokes au premier membre, en obtenant :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

et comme il doit évidemment être valable pour chaque surface S , il en résulte (*quatrième équation de Maxwell en régime stationnaire*) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.12)$$

Il n'est pas étonnant que le rotationnel soit différent de zéro. En fait, le fait que le rotationnel s'annule est l'expression locale du fait que le champ de vecteur est radial, ce qui n'est évidemment pas le cas du champ \vec{B} en raison de la forme particulière de la force de Lorentz.

Il est utile de noter que dans les conditions de validité du théorème de Schwarz la divergence d'un rotor est nulle, dans ce cas la relation est vérifiée :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

et donc pour que l'(5.12) soit valide doit être $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$. Si nous nous souvenons de l'équation de continuité (4.6), nous voyons que cette condition est satisfaite dans le cas stationnaire.²² Mais sur la base de l'équation (4.6), nous pouvons en déduire que l'équation (5.12) n'est valide que dans le cas stationnaire, car le fait que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \neq 0$ en conditions non stationnaires conduira à l'ajout d'un terme à la (5.12).

5.4 Potentiels magnetostatiques

Comme nous l'avons vu pour le champ \vec{E} , les deux équations (5.9) et (5.12) déterminent de manière unique le champ \vec{B} . Cependant, à moins qu'il ne s'avère également que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, le

19. L'angle va de 0 à θ sur la ligne l_1 , mais de θ à 0 sur la ligne l_2 , où il revient en arrière

20. Cela vient du fait que la force de Lorentz n'est pas centrale, comme on le voit.

21. Nous pouvons intégrer sur toute la surface S , car \vec{J} donne une contribution non nulle seulement à l'intérieur du fil conducteur.

22. C'est-à-dire $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

champ \vec{B} n'a pas rotationnel nul et n'est donc pas conservatif. Cela implique qu'il n'est pas possible d'introduire de façon générale un potentiel scalaire tel que $\vec{\nabla}\phi = \vec{B}$.

Cependant, grâce au fait que \vec{B} est solénoïdal et que par conséquent sa divergence est identique à zéro et en se basant sur la relation vectorielle pour laquelle le rotationnel d'une divergence est toujours nul,²³ il est possible de définir un potentiel tel que son rotationnel soit le champ \vec{B} . Ce potentiel s'appelle *potentiel vecteur*.

Il convient de noter que l'existence de monopoles magnétiques rendrait l'équation (5.9) invalide et qu'il ne serait donc pas possible de définir un potentiel vecteur tel qu'il sera fait ici.

5.4.1 Potentiel scalaire

Comme nous le savons, nous pouvons introduire un potentiel scalaire que pour un champ irrotationnel, ce qui n'est pas le cas du champ \vec{B} . Cependant, d'après la (5.12) nous voyons que la "rotationnalité" du champ est concentrée dans les conducteurs parcourus du courant. Par conséquent, il est légitime se demander s'il ne serait pas possible de trouver un potentiel scalaire en excluant la région où $\vec{\nabla} \times \vec{B} \neq 0$.

Cela revient à dire que dans cette région le champ d'induction magnétique est conservatif. Rappelons-nous qu'un champ est conservatif si l'intégrale de ligne le long d'une courbe fermée est égale à zéro quelle que soit la ligne choisie, condition qui n'est généralement pas satisfaite par le champ \vec{B} .

Les mathématiques nous garantissent qu'un champ conservatif est nécessairement irrotationnel, mais pas l'implication inverse. La condition que le rotationnel s'annule n'est qu'une condition suffisante. Si nous voulons que le champ soit conservatif, nous allons devoir ajouter une condition sur le domaine de définition :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \text{ in } \Omega \\ \Omega \text{ simplement connexe} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B} \text{ est conservatif en } \Omega$$

Le fait que le domaine doit être simplement connexe signifie que toutes les courbes fermées au sein du domaine Ω doivent pouvoir se réduire à un point tout en restant dans le domaine. Dans le cas tridimensionnel, cela signifie que nous pouvons éliminer une sphère de notre domaine,²⁴ mais pas un ensemble de "tuyaux" comme pourrait l'être un ensemble de fils conducteurs. Dans ce cas les courbes fermées ne peuvent pas *toutes* être réduites à un point avec continuité : chaque courbe qui concatène le circuit ne bénéficie pas de cette propriété.

Nous avons donc deux possibilités pour rendre le champ \vec{B} irrotationnel :

- nous pouvons exclure du domaine une sphère qui inclut complètement le circuit : le domaine de définition est donc simplement connexe et l'annulation du rotationnel garantit que le champ est conservatif, selon les mêmes considérations que nous avons faites pour le champ électrostatique \vec{E} . Le potentiel scalaire magnétostatique défini de cette façon aura donc les mêmes propriétés que le potentiel électrostatique et par conséquent \vec{B} est conservatif et le travail ne dépend plus du chemin choisi.
- nous pouvons exclure uniquement la région du circuit pour laquelle $\vec{J} \neq 0$. Il ne sera pas possible alors de définir un potentiel au sens du potentiel électrostatique, mais il est toujours possible de définir un potentiel statique. Comme nous le verrons bientôt, *ce potentiel dépendra cependant du chemin choisi*.

Dans ce qui suit, nous choisirons le cas le plus général et donc nous suivrons la deuxième possibilité. Nous émettons donc l'hypothèse que le champ \vec{B} puisse en réalité être écrit en tant que gradient d'un potentiel scalaire $\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi$ ⁽²⁵⁾ et multiplier par un décalage infiniment petit $d\vec{x}$:

$$\vec{B} \cdot d\vec{x} = -\vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{x}$$

23. Dans les conditions de validité du théorème de Schwarz.

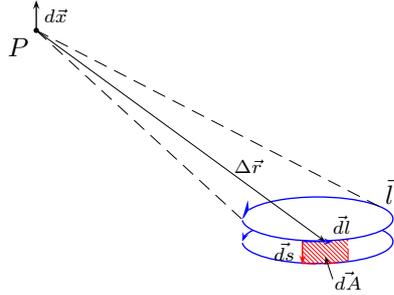
24. Dans ce cas, chaque courbe peut être réduite à un point en contournant la sphère.

25. Le signe négatif est ici pour garder l'analogie avec le champ électrostatique.

De la définition de gradient il s'écoule que $\vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{x} = d\phi$, à savoir le différentielle exacte de la fonction potentiel. Nous obtenons ainsi le champ \vec{B} qui en dérive par la (5.5) :

$$-d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\oint \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \right] \cdot d\vec{x}$$

où $d\vec{l}$ sont les coordonnées linéaires qui identifient le circuit (sous intégrale) et $d\vec{x}$ représente le déplacement infiniment petit. Or, un mouvement de $d\vec{x}$ au point où nous calculons le champ équivaut à déplacer le circuit de $-d\vec{s}$ selon le même raisonnement que dans §1.4 :



d'où :

$$-d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\oint \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \right] \cdot d\vec{s}$$

et de la propriété du produit vectoriel mixte :

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1$$

où $\vec{v}_1 = d\vec{l}$, $\vec{v}_2 = \Delta\vec{r}$ e $\vec{v}_3 = d\vec{s}$, il s'ensuit :

$$-d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\oint d\vec{s} \times d\vec{l} \cdot \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\oint d\vec{l} \times d\vec{s} \cdot \frac{-\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \right]$$

mais $d\vec{l} \times d\vec{s}$ correspond à l'élément de surface balayé par $d\vec{l}$ lors du déplacement $d\vec{s}$ et que nous avons indiqué par $d\vec{A}$, donc :

$$-d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\oint d\vec{A} \cdot \frac{-\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \right]$$

$d\vec{A} \cdot (-\Delta\vec{r})$ est l'élément de surface dA_n projeté sur la direction $\Delta\vec{r}$ et par conséquent l'élément de surface dA_n perpendiculaire à $\Delta\vec{r}$.

$$-d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\oint \frac{d\vec{A}_n}{|\Delta\vec{r}|^2} \right]$$

l'intégrant représente l'angle solide sous lequel est vu la surface dA_n à partir du point P . Par conséquent, son intégrale représente la variation d'angle solide inversée de signe (en raison du signe moins dans $-\Delta\vec{r}$) sous lequel est vue la zone balayée par l'ensemble du circuit dans son déplacement vu depuis P :

$$-d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{A}_n}{|\Delta\vec{r}|^2} = \underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega}_{\vec{B} \cdot d\vec{x}}$$

rappelons-nous maintenant que $-d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{x}$ e la (5.11), l'intégrale s'écrit donc :

$$-\phi = \int_{\Omega} \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega + n\mu_0 I = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (\Omega + n4\pi)$$

c'est-à-dire :²⁶

$$\phi = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} (\Omega + n4\pi)$$

Le potentiel scalaire magnétostatique en un point générique P est donc proportionnel à l'angle solide sous-tendu par le circuit vu du point P . Si le domaine est simplement connexe ou si nous excluons une sphère contenant tout le circuit, le degré de concaténation est $n = 0$ et le potentiel est réduit à la forme $\phi = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega$.

Si au lieu de cela nous sommes dans le second cas, c'est-à-dire que nous excluons uniquement le circuit du domaine et que celui-ci n'est plus simplement connexe, nous devons alors prendre en considération le fait que la courbe peut être concaténée au circuit. Chaque tour de courbe autour du circuit apporte alors une contribution de 4π ⁽²⁷⁾ au potentiel statique.

Dans un domaine non simplement connexe, le potentiel magnétostatique n'est plus une fonction monodrome des coordonnées et prend des valeurs différentes en fonction du chemin choisi. Même si ce potentiel n'a pas de valeur bien définie à aucun endroit de l'espace, le champ \vec{B} , qui est le seul observable physiquement, est toujours bien déterminé car le potentiel diffère d'une valeur constante et donc son gradient est nul :

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi = -\vec{\nabla} \left[-\frac{\mu_0 I}{4\pi} (\Omega + n4\pi) \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla}\Omega$$

D'un point P assez éloigné du circuit, l'angle sous-tendu correspond à la projection sur la normale de la surface du circuit, c'est-à-dire :

$$\Omega \simeq -\frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

il s'ensuit :

$$\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^3} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (5.13)$$

où nous avons défini la quantité $\vec{m} = I\vec{S}$. Ce résultat nous reviendra utile dans §5.5.

5.4.2 Potentiel vecteur

Si nous recherchons un potentiel qui n'a pas les limitations du potentiel scalaire et qui est donc valable en général dans toute l'espace, nous devons utiliser un autre point de vue.

Pour le potentiel statique, nous partons de l'idée que l'irrotationnalité du champ d'induction magnétique $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ nous garantissait l'existence d'une fonction scalaire telle que $-\vec{\nabla}\phi = \vec{B}$. Cette condition, cependant, n'est pas valable partout.

Afin de définir un autre type de potentiel nous partirons de l'observation suivante, que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ est valide toujours et dans toutes les conditions. Nous savons d'après l'analyse vectorielle que la divergence d'un rotationnel est identiquement nulle,²⁸ si nous pouvons donc trouver une fonction \vec{A} telle que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$, alors la deuxième équation de Maxwell est automatiquement vérifiée :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv 0$$

Le champ \vec{A} est appelé *potentiel vecteur*. En termes de potentiel vecteur, la quatrième équation de Maxwell dans le cas stationnaire (5.12) devient :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

or, d'après l'analyse vectorielle :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

26. La constante d'intégration peut être mise à zéro en imposant que le potentiel soit nul à l'infini.

27. C'est-à-dire, un tour complet d'angle solide.

28. Toujours dans les hypothèses du théorème de Schwarz.

L'équation :

$$\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

peut être grandement simplifié si on remarque que la relation $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ ne définit pas de manière univoque le champ \vec{B} . Puisque le rotationnel d'un gradient est identiquement nul, chaque potentiel vecteur de la forme :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

correspond au même champ induction magnétique \vec{B} .

Les transformations de jauge

Nous savons par l'analyse mathématique qu'une fonction admet en réalité un nombre infini de primitives, car l'intégrale indéfinie d'une fonction est définie à une constante près. Cela est évident, car si $f'(x)$ est le dérivé de $f(x)$, alors toutes fonctions $f(x) + c$ auront le même dérivée $f'(x)$.

La définition de potentiel implique que le champ soit calculé par des combinaisons particulières d'opérations dérivées. Il ne faut donc pas s'étonner du fait qu'ils existent plusieurs potentiels qui produisent le même champ après une opération de gradient ou de rotor.

Comme on peut le voir dans le cas du vecteur potentiel \vec{A} , par exemple, tout ajout d'une fonction dont le rotationnel est nul entraîne l'apparition du même champ \vec{B} . Étant données que le rotationnel d'un gradient est identiquement nul, écrire le potentiel vecteur sous la forme $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$ assure automatiquement que le champ \vec{B} est le même. Le potentiel vecteur n'est donc pas déterminé de manière univoque, mais à une "constante" près sans affecter la physique qui, quant à elle, est contenue dans les champs.

Par conséquent, le point à retenir est que l'on peut choisir la forme du potentiel qui convient le mieux pour les calculs sans pour autant modifier la physique. Cette transformation d'un potentiel à un autre s'appelle *transformation de jauge*. En réalité, d'un point de vue physique le choix de la transformation à utiliser implique l'ajout de conditions supplémentaires au potentiel, conditions qui, si elles sont correctement choisies, permettent de simplifier les équations ou d'en mettre en évidence certaines caractéristiques particulières.

En électromagnétisme, quatre transformations de jauge possibles existent :

1. La jauge de Coulomb : consiste à imposer $\nabla \cdot \vec{A} = 0$
2. La jauge de Lorentz : consiste à imposer la condition $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$
3. La jauge de Weyl ou temporelle : consiste à imposer $\phi = 0$
4. La jauge de rayonnement : elle consiste à imposer la jauge de Coulomb plus la jauge temporelle.

mis à part la première que nous utiliserons immédiatement, nous verrons l'importance des autres transformations lorsque nous parlerons de champs électromagnétiques et d'ondes.

Nous remarquerons dès à présent que le concept de transformation de jauge est très important en physique, car il se révèle lié aux symétries du système examiné.

Revenons maintenant à la quatrième équation de Maxwell dans le cas stationnaire :

$$\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

et essayons de le simplifier en appliquant la jauge de Coulomb. Pour ce faire, nous appliquons la divergence au potentiel \vec{A}' :²⁹

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 f$$

Donc si nous choisissons f de façon à avoir $\nabla^2 f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$, alors \vec{A}' satisfera la jauge de Coulomb et la divergence sera nulle. Dans ce cas l'équation est réduite à :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}} \quad (5.14)$$

29. Rappelons-nous que la divergence d'un gradient est équivalente au laplacien.

dont la solution pour les trois composants est formellement identique à la (1.4) :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}' \quad (5.15)$$

et si \vec{J} n'est localisé que dans les conducteurs parcouru par le courant, $\vec{J}d\mathcal{V} = JS\vec{dl} = I\vec{dl}$ e :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{I}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{dl} \quad (5.16)$$

5.5 Actions mécaniques sur les circuits parcouru par courant électrique

La relation (5.1) ou, de manière équivalente, (5.2) sont évidemment suffisantes pour calculer la dynamique d'un circuit immergé dans un champ d'induction magnétique. Grâce aux lois de la mécanique, il suffit en effet de connaître la résultante des forces et des moments pour écrire les équations dynamiques. Ces quantités en termes de la IIème loi de Laplace (5.1) sont écrites :

$$\vec{F} = I \oint \vec{dl} \times \vec{B} \quad \vec{M} = I \oint \vec{r} \times (\vec{dl} \times \vec{B})$$

où l'intégrale curviligne est censée être étendue au circuit. Ces relations expriment simplement le fait que la force résultante sur le circuit est la somme des forces agissant sur les éléments \vec{dl} du circuit.

Il est utile de remarquer maintenant que lorsqu'un circuit parcouru par un courant est immergé dans un champ d'induction magnétique des phénomènes apparaissent de façon à varier le courant circulant dans le circuit et le champ \vec{B} à l'extérieur, par conséquent ces formules peuvent être plus complexes que ce qui sembleraient à première vue.

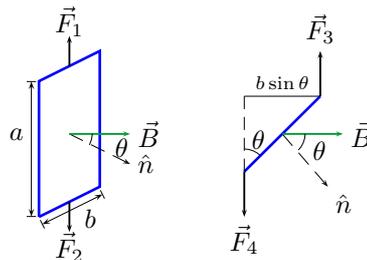
Calculons-nous la force agissant sur un segment de circuit d'extrêmes P_1 et P_2 parcourus par le courant électrique I et immergés dans un champ uniforme \vec{B} . La force agissant sur le fil s'écrit :

$$\vec{F} = I \int_{P_1}^{P_2} \vec{dl} \times \vec{B} = I \left(\int_{P_1}^{P_2} \vec{dl} \right) \times \vec{B} = I \overrightarrow{P_1 P_2} \times \vec{B}$$

où avec $\overrightarrow{P_1 P_2}$ nous avons indiqué la ligne orientée de P_1 à P_2 . On remarque que la valeur de la force ne dépend que des extrémités du segment, nous pouvons donc en déduire que la force agissant sur un circuit fermé (une spire, par exemple) est nulle. C'est effectivement le cas :

$$\vec{F} = I \oint \vec{dl} \times \vec{B} = I \left(\oint \vec{dl} \right) \times \vec{B} = 0$$

en effet $\oint \vec{dl} = 0$.³⁰ Nous voyons donc que pour une spire, la résultante des forces est nulle, elle donc n'est soumise qu'à un moment de force qui finit par la faire tourner. Voyons en détail le cas d'une spire rectangulaire parcourue par un courant constant I .



30. C'est une intégrale de ligne située le long d'un segment orienté. $\oint dl \neq 0$ et c'est la longueur du circuit fermé

Les branches de longueur a sont traversées par le même courant dans des directions opposées, de sorte que la somme des forces s'annule.³¹ On peut en dire autant des branches de longueur b , par conséquent la résultante des forces s'annule. Les forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 constituent une couple de forces de bras nul puisque : 1) les forces sont dirigées perpendiculairement aux lignes b et dans des directions opposées, 2) elles ne forment aucun angle avec le champ \vec{B} et sont donc alignés.

Par contre, les forces \vec{F}_3 et \vec{F}_4 agissant sur les bras a ne sont pas alignées³² et elles forment une couple de bras $b \sin \theta$. La force agissant sur chacun des branches a est donnée par $F = IaB$, le moment du couple est donc :

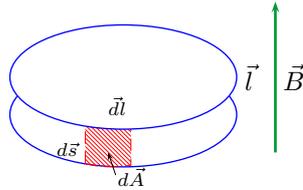
$$M = Fb \sin \theta = IabB \sin \theta = ISB \sin \theta$$

où S est la surface de la spire. Considérant que le moment est perpendiculaire aux branches a et au vecteur \vec{B} , le moment peut être écrit :

$$\vec{M} = IS\hat{n} \times \vec{B} \equiv \vec{m} \times \vec{B}$$

où nous avons défini le *moment magnétique de la bobine* $\vec{m} = IS\hat{n}$. Le nom *moment magnétique* est suggéré par l'analogie avec la seconde des (1.16) dans le cas d'un dipôle électrique. En effet, ce résultat avec les (5.7) et les (5.13) nous permet de conclure que *une spire parcourue par un courant se comporte comme un dipôle électrique*.

La démonstration formelle de cette affirmation nécessite un complément d'étude.



Considérons une spire parcouru par un courant I et immergée dans un champ d'induction magnétique \vec{B} . Selon le principe des travaux virtuels, si nous appliquons une force $d\vec{f}$ pour effectuer un déplacement (virtuel) $d\vec{s}$ sur un élément $d\vec{l}$ du circuit, cette force doit être égal et inverse à celle $d\vec{F}$ qui subit ce même élément de circuit en raison du champ \vec{B} . Mais le travail effectué par la force virtuelle appliquée à l'élément du circuit est égal à la variation de l'énergie potentielle mécanique,³³ Nous pouvons donc écrire :

$$d\vec{f} = -d\vec{F} = -I d\vec{l} \times \vec{B}$$

et pour l'énergie potentielle :

$$dU = dL = - \oint d\vec{F} \cdot d\vec{s} = -I \oint (d\vec{l} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

par la propriété du produit vectoriel mixte, nous pouvons écrire :

$$d\vec{l} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = d\vec{s} \times d\vec{l} \cdot \vec{B} = -d\vec{l} \times d\vec{s} \cdot \vec{B}$$

d'où :

$$dU = I \oint (d\vec{l} \times d\vec{s}) \cdot \vec{B}$$

mais $d\vec{l} \times d\vec{s}$ représente l'élément de surface $d\vec{A}$ balayé par l'élément de circuit $d\vec{l}$ dans son déplacement virtuel, par conséquent :

$$dU = I \int_{d\Sigma} d\vec{A} \cdot \vec{B}$$

31. Elles sont égales et opposées en raison du signe différent du courant.

32. Ceci parce que la spire a tourné autour d'un axe parallèle aux côtés a d'un angle θ par rapport au champ \vec{B} .

33. Mécanique car cette force n'est que les déplacements *mécanique* du circuit. Les forces dues aux variations de courant et d'induction de champ magnétique ne sont pas prises en compte dans ce contexte.

où $d\Sigma$ représente la surface balayée par le circuit en raison du déplacement virtuel. Mais cette intégrale est par définition le flux de \vec{B} à travers $d\Sigma$. Nous avons déjà montré que le flux de \vec{B} à travers une surface ne dépend que du bord de la surface elle-même, nous pouvons donc en déduire que la variation de l'énergie potentielle magnétique est proportionnelle à la variation du flux enchaîné avec la spire :³⁴

$$dU = -I d\Phi(\vec{B})$$

et si la surface est suffisamment petite pour pouvoir considérer le champ \vec{B} constant (comme c'est le cas d'une petite spire), la variation d'énergie potentielle s'écrit :

$$dU = -I \vec{S} \cdot \vec{B} \equiv -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

où \vec{m} est le moment magnétique défini auparavant.

Comme déjà vu dans §1.4, le travail subi par un système générique peut toujours être décomposé en une partie due à la résultante des forces et une partie due au moment résultant, à savoir :

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{l} + \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$$

D'autre part, le travail accompli est égal à la variation d'énergie potentielle mécanique inversée de signe, c'est-à-dire :

$$-dL = dU = \frac{\partial U}{\partial l} dl + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta$$

où le premier terme représente le dérivé directionnel de U lelong dl et le second terme, le dérivé de U par rapport à l'angle θ .

Par comparaison, nous pouvons en déduire :

$$\begin{cases} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial U}{\partial l} dl \\ \vec{M} \cdot d\vec{\theta} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta \end{cases}$$

Or, dans la relation $U = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \cos \theta$, la dépendance de la position n'est contenue que dans le champ d'induction magnétique \vec{B} tandis que la dépendance de l'angle n'apparaît qu'à travers $\cos \theta$. Il s'ensuit :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial l} dl = (dU)_{\theta=\text{const.}} = \vec{\nabla} U \cdot d\vec{l} = -\vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta = -\frac{\partial}{\partial \theta}(mB \cos \theta) d\theta = mB \sin \theta d\theta = (\vec{m} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\theta} \end{cases}$$

Toujours par comparaison, nous pouvons donc écrire :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) \\ \vec{M} = -(\vec{m} \times \vec{B}) = \vec{B} \times \vec{m} \end{cases}} \quad (5.17)$$

D'après ces relations, il est évident que la résultante des forces agissant sur la spire est différente de zéro uniquement si le champ \vec{B} n'est pas uniforme dans au moins une coordonnée. Sinon, la seule force agissant sur la spire est un couple de moments $\vec{m} \times \vec{B}$. Dans un champ d'induction magnétique uniforme, une spire a tendance à tourner jusqu'à ce qu'elle soit perpendiculaire au champ.

Le résultat (5.17) est formellement identique à (1.16), la physique qui en découle est donc identique. Cela nous permet d'énoncer le **théorème d'équivalence d'Ampère** :

Une spire parcourue par un courant immergée dans un champ d'induction magnétique se comporte tel qu'un dipôle magnétique.

34. Le flux lié à une spire ne dépend que de la spire. Par conséquent, si la spire effectue un décalage virtuel, la différence entre le flux chaîné avant et après le déplacement est donnée par le flux lui-même à travers la surface virtuelle $d\Sigma$.

D'un point de vue historique, c'est sur ce théorème d'équivalence que Ampère formula l'hypothèse que les dipôles magnétiques, responsables des interactions entre les aimants, sont en réalité générés par des courants électriques circulaires microscopiques. Comme nous l'avons déjà mentionné, cette intuition était fondamentalement correcte même si une explication détaillée de l'origine de ces courants dépassait les possibilités de Ampère. Nous reprendrons ce sujet en détail dans le §6.

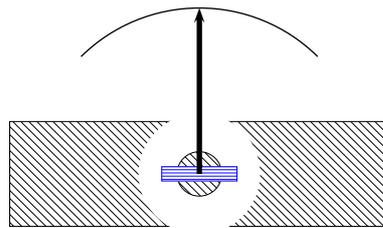
Le galvanomètre à bobine mobile

Nous avons vu qu'une spire parcouru par un courant immergée dans un champ d'induction magnétique constant subit un moment proportionnel au courant traversant la spire. Ce phénomène peut être exploité à bon escient pour effectuer des mesures de courant électrique.

Considérons une bobine composée de N tours de surface S et parcouru par un courant I . Le couple auquel la spire est soumise peut être écrite ainsi :

$$M_{\text{mag}} = NIBS \sin \theta$$

le couple est donc proportionnelle à I , mais cela dépend aussi de l'angle initial θ que la bobine forme avec le vecteur \vec{B} . Pour résoudre ce problème, nous devons trouver un moyen nous permettant d'avoir deux forces toujours perpendiculaires aux branches de la bobine, quelle que soit sa position angulaire. Ce résultat peut être obtenu en rendant le champ \vec{B} radial par rapport à la bobine, modifiant ainsi la disposition théorique comme indiqué dans la figure suivante :



de cette manière, le couple de forces sollicite toujours la bobine perpendiculairement à la spire et le moment est indépendant de l'angle θ de la bobine par rapport à \vec{B} .³⁵

Un ressort en spirale plat opposé au mouvement de la bobine fournit un moment mécanique donné par $M_{\text{mec}} = k\delta$, où δ est l'angle formé par le ressort en spirale.³⁶ Par conséquent, quand dans la bobine y a un courant I , la condition d'équilibre s'écrit :

$$M_{\text{mag}} = M_{\text{mec}} \quad \Rightarrow \quad NIBS = k\delta \quad \Rightarrow \quad I = \frac{k}{NBS} \delta$$

On peut donc voir que l'angle de déviation δ de la spire, indiqué par une aiguille en mouvement sur une échelle correctement calibrée, est proportionnel au courant I qui passe dans la bobine. Le terme k/NBS prend le nom de *constante de l'instrument*.

5.6 Interactions entre circuits parcouru par un courant continu

Puisqu'un circuit électrique génère autour de lui un champ d'induction magnétique et que le champ d'induction magnétique interagit avec le conducteur lui-même, il est évident qu'entre deux conducteurs parcourus de courant des forces réciproques doivent s'exercer "à travers" le champ \vec{B} . Nous allons maintenant formaliser cette interaction.

Considérons deux circuits l_1 et l_2 , parcourus par des courants respectivement I_1 et I_2 . On note $d\vec{F}_{21}$ la force exercée sur l'élément de circuit dl_2 en raison du champ B_1 généré par le circuit l_1 .

³⁵. Car dans cette configuration $\sin \theta = 1$ toujours.

³⁶. Un ressort en spirale plat est un ressort en forme de spirale qui fournit un moment de rotation au lieu d'un allongement linéaire. La loi de Hooke prend alors la forme $M = k\delta$, où k est la constante élastique du ressort et δ l'angle de rotation du ressort.

Selon la deuxième loi de Laplace (5.1), la force $d\vec{F}_{21}$ s'écrit :

$$d\vec{F}_{21} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

et en exprimant le champ \vec{B}_1 par la loi de Biot et Savart intégrée au circuit l_1 (5.5) :

$$d\vec{F}_{21} = I_2 d\vec{l}_2 \times \oint_{l_1} \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (5.18)$$

où r_{12} représente le vecteur de position rejoignant l'élément de circuit $d\vec{l}_1$ avec le point de l'espace où se trouve l'élément $d\vec{l}_2$.

Si les deux circuits sont rigides, la force résultante sur le circuit 2 peut être calculée en intégrant sur tout le circuit l_2 :

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \oint_{l_1} I_1 \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

et comme les deux intégrations ont lieu sur deux variables indépendantes, le premier circuit peut être amené sous la deuxième intégration :

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} I_1 I_2 d\vec{l}_2 \times \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

en utilisant la relation vectorielle :

$$d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}) = (d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}) d\vec{l}_1 - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{r}_{12}$$

et étant donné que les courants sont constants le long du circuit, nous pouvons sortir les variables I_1 et I_2 du signe intégrale :

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \left[\oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} d\vec{l}_1 - \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \right]$$

La première de ces intégrales est nulle, car :

$$\oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} d\vec{l}_1 = \oint_{l_1} \left(\oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) d\vec{l}_1 = \oint_{l_1} \left(- \oint_{l_2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \cdot d\vec{l}_2 \right) d\vec{l}_1$$

et l'intégrale en $d\vec{l}_2$ n'est rien d'autre que le contour du champ de vecteurs $\vec{r}_{12}/r_{12}^3 = -\vec{\nabla}(1/r_{12})$, ce qui s'avère être un champ conservateur et dont la circulation est donc nulle. En conséquence :

$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}$$

Remarquons que si nous inversons \vec{r}_{21} et \vec{r}_{12} , la force change de signe et ceci est cohérent avec le principe d'action et de réaction.

Si les deux circuits sont constitués de très longs fils, à la limite infinie, placés à une distance fixe constante R , vous pouvez utiliser le (5.10) et l'intégrer, en obtenant ainsi :

$$\boxed{\frac{\vec{F}_{21}}{d\vec{l}_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{R} \hat{r}_{21}} \quad (5.19)$$

le produit scalaire $d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2$ garantit que la force est attractive si la direction des courants est concorde³⁷ et répulsive s'il n'est pas concorde.

Le résultat (5.19) constitue la *loi de Ampère*, et permet de définir l'unité de mesure *Ampère* comme la courant circulant dans deux fils rectilignes placés à une distance de 1 mètre est affecté par une force égale à $\mu_0/4\pi = 2 \times 10^{-7}$ N/m.

37. Dans ce cas, $d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 > 0$, $d\vec{l}$ est concorde avec le courant.

5.7 Champs électrostatique est magnétostatique en relativité restreinte

Au début de ce chapitre nous avons constaté que la force de Lorentz est une quantité dépendant de la vitesse et par conséquent du système de référence choisi. Plus spécifiquement, dans le système de référence de la particule la force de Lorentz disparaît et par conséquent tous effets du champ d'induction magnétique disparaissent eux aussi, ce qui est à l'origine d'un gros problème. Voyons en détail quel est ce problème.

Considérons une charge de test positive q à une distance r d'un conducteur de fil chargé positivement ayant une densité de charge linéaire λ .

Soit O le système de référence du laboratoire dans lequel le fil et la charge sont à repos. La charge q subit une force de répulsion électrostatique donnée par :

$$F_{\text{el}} = qE = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

où nous avons tenu compte de la (1.10).

Soit maintenant O' un référentiel inertiel en mouvement à une vitesse $-v$ par rapport au fil et à la charge. Cet observateur voit une rangée de charges positives se déplaçant à une vitesse v et par conséquent un courant électrique. Puisque le courant est par définition le nombre de charges par unité de temps, le courant vu par O' est $I = \lambda v$. Mais en ce système de référence, la charge de test q est également en mouvement et donc elle est affectée en plus par une force due au champ magnétique généré par le courant circulant dans le fil. Cette force, en prenant en compte la loi de Lorentz (5.2) et de la (5.10), s'écrit :³⁸

$$F_{\text{mag}} = qvB = qv \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{q\lambda\mu_0}{2\pi r} v^2$$

Puisque nous avons la relation $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$,³⁹ nous pouvons en déduire :

$$F_{\text{mag}} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v^2}{c^2}$$

puisque nous pouvons supposer que $v^2/c^2 \ll 1$, la force de Lorentz est faible comparée à celle de Coulomb. La force résultante est donc dirigée le long de la ligne rejoignant q avec le fil et elle est répulsive. Dans le système O' la particule de test est donc affectée par une force :

$$F = F_{\text{el}} - F_{\text{mag}} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

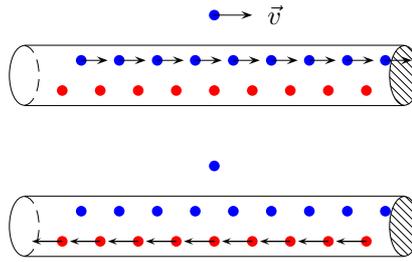
Il serait donc possible de savoir, par des mesures de force, si nous sommes dans un système stationnaire ou inertiel, ce qui est en contradiction avec le principe de relativité.

D'un point de vue historique, c'était la recherche de la solution à ce problème et la nécessité de démontrer l'invariance des équations de Maxwell par transformations de référentiels inertiels qui conduisit Einstein à la formulation de la théorie de la relativité restreinte.

Considérons maintenant un conducteur dans lequel un courant circule, c'est-à-dire qu'il y a des électrons en mouvement ordonnés à une vitesse \vec{v} .

38. Nous savons que la charge électrique est un invariant universel, donc q reste le même dans tous les référentiels. Cette position est largement confirmée par des preuves expérimentales.

39. Cette relation est impossible à justifier pour le moment. Il faudra pour l'instant l'accepter et différer sa justification au moment où nous aborderons le sujet des ondes électromagnétiques. D'un point de vue historique, la théorie de l'électromagnétisme était déjà pleinement développée lorsque ce problème se posa.



Afin de simplifier les calculs, supposons que dans le système du laboratoire O les ions positifs soient toujours à repos et qu'un électron de test soit en mouvement parallèlement aux électrons de conduction et à la même vitesse v . Le conducteur est électriquement neutre.

Le courant I génère un champ d'induction magnétique qui affecte l'électron de test, si r est la distance qui le sépare du fil il est soumis donc à une force :

$$F = e(\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{ev\mu_0 I}{2\pi r^2}$$

Regardons maintenant cette configuration dans le système de référence O' en mouvement avec l'électron. Dans ce référentiel, l'électron de test est à l'arrêt et le fil se déplace avec une vitesse de $-v$. En conséquence, en raison des hypothèses simplificatrices que nous avons formulées les électrons de conduction du fil sont aussi à l'arrêt dans cette référentiel et les ions positifs se déplacent à une vitesse $-v$.

Mais vu du système mobile O' , la distance entre les ions positifs est réduite par un facteur de Lorentz :⁴⁰

$$d = d_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \equiv d_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

par la suite, nous adopterons la convention relativiste qui consiste à indiquer $\beta \equiv v/c$ et $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Puisque la définition de densité de charge est le rapport entre charge et volume :

$$\rho_0 = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Sd_0}$$

la densité de charges positives ρ_+ vue par le système de repère O' augmente :

$$\rho_+ = \frac{Q}{Sd} = \frac{Q}{Sd_0} \gamma = \gamma \rho_{+0} > \rho_{+0}$$

car certainement $v > c$ et donc $\gamma > 1$. La densité des charges négatives reste la même (dans le système O' elles ne sont pas en mouvement), par conséquent il en résulte $\rho_+ > \rho_-$, autrement dit *dans le système O' le fil est électriquement chargé*. Si le fil en ce système est chargé, l'électron de test est affecté par une force de Coulomb dirigée vers le fil donnée par :

$$F = eE = \frac{e(\rho_+ - \rho_-)}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Les deux forces sont donc identiques.

Ce que nous mesurons est en réalité un changement de la quantité de mouvement en l'unité de temps, lié à la force par la relation :

$$\Delta p = F \Delta t$$

Voyons maintenant comment ces quantités changent en passant du système O au système O' .

40. Et cela à cause de la contraction de longueurs relativistes.

Nous savons que les longueurs sont contractées d'un facteur γ :

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \equiv \frac{L}{\gamma}$$

d'où la densité de charge λ :

$$\lambda' = \frac{q}{L'} = \frac{q}{L}\gamma = \gamma\lambda$$

en ce qui concerne la force :

$$F = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad F' = F\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{q\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma}\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{\gamma}F$$

si on considère que $\Delta t' = \gamma\Delta t$, il en suit :

$$F'\Delta t' = \frac{1}{\gamma}F\gamma\Delta t = F\Delta t$$

c'est-à-dire, même si les deux systèmes mesurent des valeurs numériquement différentes pour F , L et Δt , les équations décrivant la dynamique restent les mêmes.

Deux points importants restent à clarifier.

Comment est-il possible que dans le système en mouvement la densité de charge augmente soit compatible avec la conservation de la charge? Si la densité augmente, plus des charge doivent être présente dans la même partie du fil, mais le fil est initialement électriquement neutre. La réponse réside dans le fait qu'un circuit dans lequel circule un courant électrique ne peut être infiniment rectiligne, mais doit se fermer tôt ou tard. Mais alors à la branche en mouvement relatif $-v$ par rapport à la particule de test correspond une branche en mouvement relatif $+v$ du côté opposé du circuit où la densité de charge *diminue*. Les deux effets se compensent le long du circuit⁴¹ et il n'y a pas de paradoxe.

Le deuxième point concerne l'entité de l'effet relativiste. Nous avons vu que la vitesse de dérive du courant électrique est très faible, de l'ordre de 2.33×10^{-6} m/s, ce qui nous donne :

$$\frac{v}{c} = \frac{2.33 \times 10^{-6}}{299792458} \simeq 10^{-14}$$

et par conséquent la différence entre la densité de charges positives et négatives est l'ordre :

$$\rho_+ - \rho_- = 1 - \sqrt{1 - \beta^2} \simeq 10^{-14}$$

La question qui se pose alors est la suivante : comment une si petite différence peut-elle générer un effet aussi important à l'échelle macroscopique? La réponse est en fin de compte simple : 10^{-14} et l'ordre de grandeur de l'effet sur *une* charge. Mais nous avons vu que dans un conducteur il y a environ 10^{23} électrons, chacun apportant une contribution de 10^{-14} . Nous voyons ainsi que l'effet total devient perceptible au niveau macroscopique.

5.7.1 Approfondissement sur la relation entre champ électrique, induction magnétique et principe de relativité

La relation entre le principe de relativité et le champ magnétique est importante et suffisamment intéressante pour nécessiter des approfondissements.

Considérons une charge q à repos dans un système de référence O . Nous savons que le champ électrique généré est radial et a la forme :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

41. C'est comme si les charges "accumulées" d'un côté devenaient plus rares de l'autre.

dont les composantes cartésiennes dans le plan xy le long de la direction θ sont données par :

$$\begin{cases} E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos\theta \hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \hat{x} \\ E_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \sin\theta \hat{y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \hat{y} \end{cases}$$

Considérons un système de référence O' en mouvement relatif le long de l'axe x à une vitesse de $-v$, ce qui revient à dire que nous considérons un système de référence dans lequel la charge est en mouvement à vitesse de $+v$. Supposons pour simplifier, sans que cela nous fasse perdre en généralité, que l'origine des deux systèmes coïncide à l'instant $t = 0$. Cela nous permettra d'indiquer les coordonnées dans O simplement avec (x, y, z, t) et dans O' avec (x', y', z', t') . Les transformations de Lorentz entre ces deux systèmes sont données par :⁴²

$$\begin{cases} x &= \gamma x' - \gamma\beta ct' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma t' - \frac{\gamma\beta}{c} x' \end{cases}$$

En considérant que le champ électrique se transforme selon les lois $E'_x = E_x$ et $E'_y = \gamma E_y$, en utilisant les transformations de Lorentz précédemment trouvées pour les composantes du champ électrique dans O' :⁴³

$$\begin{cases} E'_x &= E_x = \frac{\gamma qx'}{[(\gamma x')^2 + y'^2]^{3/2}} \hat{x} \\ E'_y &= \gamma E_y = \frac{\gamma qy'}{[(\gamma x')^2 + y'^2]^{3/2}} \hat{y} \end{cases}$$

Nous remarquerons ici que $E'_y/E'_x = y'/x'$. Cela signifie que le vecteur \vec{E}' forme avec x' le même angle que \vec{r}' , c'est-à-dire que \vec{E}' est toujours radiale par rapport à la charge q .⁴⁴

Pour trouver l'intensité du champ il faut calculer $E'^2 = E_x'^2 + E_y'^2$:

$$E'^2 = E_x'^2 + E_y'^2 = \frac{\gamma^2 q^2 (x'^2 + y'^2)}{[(\gamma x')^2 + y'^2]^3} = \frac{q^2 (x'^2 + y'^2)}{\gamma^4 [x'^2 + y'^2 - \beta^2 y'^2]^3} = \frac{q^2 (1 - \beta^2)^2}{(x'^2 + y'^2)^2 \left(1 - \frac{\beta^2 y'^2}{x'^2 + y'^2}\right)^3}$$

indiquant avec $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ la distance d'un point P' et avec θ' l'angle entre le vecteur rayon et la vitesse de O' (qui correspond à la direction de x'), alors $y' = r' \sin\theta'$ et l'intensité du champ se réécrit :

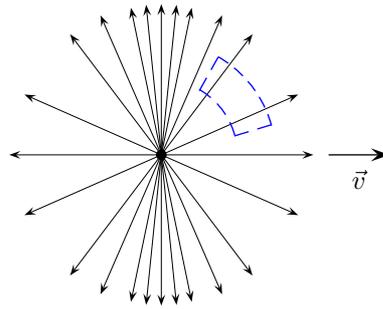
$$E' = \frac{q}{r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}}$$

évidemment, le choix du système de référence n'a rien de particulier. Ce qui compte, c'est que le champ présente une symétrie radiale et que son intensité dépend de l'angle θ que la position forme par rapport à la direction du mouvement. La forme de ce champ est montrée dans la figure suivante.

42. Souvenons-nous de la notation relativiste $\beta \equiv v/c$ et $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

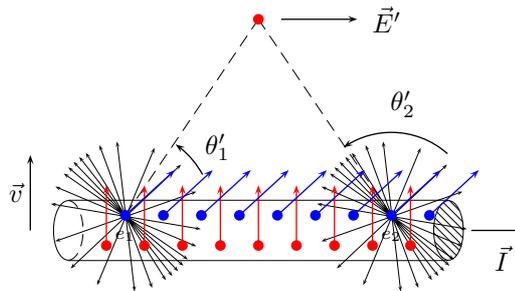
43. Nous négligerons l'écriture du facteur constant $1/4\pi\epsilon_0$ à chaque fois, car il alourdit les formules sans pour autant ajouter d'informations intéressantes.

44. Il vaut la peine de réfléchir à ce résultat. Ce que nous avons trouvé signifie que si la charge q passe à l'origine de O' à l'instant t' , un observateur situé dans un *n'importe quel point* du système O' voit le champ électrique généré par q radial et parfaitement centré sur l'origine. Comment l'observateur distant peut-il savoir qu'à l'instant exacte t' le champ est tel qu'il est radialement centré sur l'origine? Apparemment, il semblerait qu'il y ait une transmission instantanée d'informations, mais ce n'est pas le cas. Nous supposons que la particule se déplace avec un mouvement constant et uniforme, de sorte qu'à t' elle passe par l'origine O' et en tant que mouvement uniforme cette information est "connue". En d'autres termes, c'est l'historique de la charge q , connu, qui nous donne les informations dont nous avons besoin pour savoir comment le champ se trouvera à un moment donné. Pour des changements brusques de mouvement le discours est tout à fait différent, mais cette éventualité ne sera pas traitée ici.



Ce champ est radial, mais pas à symétrie sphérique. Ce n'est pas surprenant, car dans ce cas il existe une direction privilégiée définie par la vitesse \vec{v} . Un champ de cette forme ne peut pas être généré par une configuration de charge statique et cela peut être déduit par le fait que la circulation calculée le long de la ligne pointillée bleue ne s'annule pas. Les arcs de cercle ne contribuent pas, mais le champ le long de la ligne radiale plus proche de la perpendiculaire à \vec{v} est plus intense, par conséquent le long du trajet fermé montré la circulation de \vec{E}' ne s'annule pas. C'est normal, car ce n'est pas un champ électrostatique.

Revenons maintenant à notre figure à la page 105 et considérons une charge en mouvement perpendiculaire au fil et plaçons nous-mêmes dans le système de référence O' où le fil se déplace vers la charge.



Nous pouvons voir que même si les deux électrons e_1 et e_2 sont à la même distance de la charge de test q , le champ n'est pas le même. En fait, l'angle par rapport à la direction du mouvement pour l'électron e_1 est θ'_1 et presque parallèle à la vitesse \vec{v} , alors que pour l'électron e_2 la ligne rejoignant la charge de test est presque perpendiculaire au mouvement de e_2 , par conséquent $\sin^2 \theta'_2 > \sin^2 \theta'_1$ et le champ généré par l'électron e_2 au point où se trouve la charge de test est plus fort que le champ généré au même point par l'électron e_1 , et cela s'applique à toute paire d'électrons. Si ces deux champs sont composés de manière vectorielle une composante transversale émerge, composante qui pousse la charge de test à vitesse \vec{v} en direction perpendiculaire à son propre mouvement.⁴⁵ Il y a donc une force qui agit sur la charge de test dépendant de la vitesse. Il est perpendiculaire à la vitesse \vec{v} et parallèle au fil, c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe \hat{z} . Si \vec{B} est un vecteur direct le long de \hat{z} , alors la force est exprimée par $\vec{v} \times \vec{B}$.

Cela montre que l'invariance de la charge électrique⁴⁶ implique l'existence de forces entre des charges en mouvement. Les champs électriques et magnétiques sont deux aspects de l'électromagnétisme qui découlent du fait que la physique doit être la même dans tous les systèmes de référence inertiels.

Un système de charges mobiles peut certainement être étudié en modifiant le système de référence et en transformant les équations de manière appropriée. Cependant, la manière la plus simple de décrire l'effet des courants entre eux et de ceux-ci sur les charges est d'introduire un nouveau champ de vecteur, le champ d'induction magnétique \vec{B} .

45. La composant perpendiculaire au fil électronique et compensée exactement par celle des ions, étant donné la neutralité électrique du fil. Il ne reste donc que la composante transversale.

46. Position implicite dans le fait que la charge q ne se transforme pas selon la loi de Lorentz, mais reste invariante.

Magnétisme dans la matière

6.1 Généralités

Comme pour les diélectriques, lorsqu'un corps est immergé dans un champ magnétique, plusieurs effets différents se produisent. Cela n'est pas surprenant puisque le théorème d'équivalence d'Ampère nous indique que les courants électroniques atomiques se comportent tels qu'un dipôle magnétique et que, par conséquent, chaque corps matériel doit être affecté par le champ magnétique d'une manière ou d'une autre.

Cependant, les effets peuvent être très différents selon le matériau. En fonction des phénomènes observés, les matériaux peuvent être divisés en trois catégories :

- **diamagnétiques** : le matériau subit d'une faible répulsion. Les matériaux diamagnétiques les plus courants sont le mercure, l'or, le cuivre, l'argent, le bismuth, l'eau et la plupart des substances organiques. Comme nous le verrons bientôt, cet effet est dû au mouvement de précession du moment cinétique atomique dans un champ magnétique faible. Ce mouvement de précession génère un courant qui se comporte à son tour comme un faible dipôle orienté dans le sens opposé du champ \vec{B} .
- **paramagnétiques** : le matériau est faiblement attiré. Des exemples d'éléments paramagnétiques sont le calcium, l'aluminium, le magnésium, l'oxygène, le platine, le sodium et l'uranium. Ce sont des atomes ayant un moment magnétique permanent qui s'aligne le long du champ magnétique externe le renforçant. Le phénomène est d'intensité faible car il s'agit de forces faibles comparées aux mouvements d'agitation thermique. En fait, il est confirmé expérimentalement que le paramagnétisme augmente avec une baisse de température.
- **ferromagnétiques** : le matériau est fortement attiré, les forces ressenties peuvent être de l'ordre du poids du corps ou plus. Des exemples typiques de matériaux ferromagnétiques sont le fer, le cobalt, le nickel et de nombreux alliages à base de ces métaux. Pour ceux-ci, il existe des forces autres que l'interaction magnétique directe et qui sont environ 4 ordres de grandeur plus élevés. Ces forces sont telles que tous les dipôles magnétiques du matériau s'alignent parfaitement avec le champ électrique externe générant des forces très intenses. Cet effet indirect ne peut être expliqué que dans le domaine de la mécanique quantique.

Précisons immédiatement que les phénomènes de magnétisation de la matière ne peuvent pas être expliqués de manière complète et correcte par la seule mécanique classique ; ils sont en réalité des phénomènes quantiques. Si nous poussons l'interprétation classique jusqu'au bout, nous constatons que tous les effets sont annulés et que nul phénomène magnétique est possible. Si nous émettons l'hypothèse qu'il n'y a qu'un seul état d'équilibre thermodynamique et que notre système est dans cet état,¹ alors il est facile de démontrer qu'il n'existe pas de dipôle magnétique induit par un champ externe.

1. Concrètement, nous appliquons le champ magnétique au système et attendons suffisamment de temps pour qu'il atteigne l'état d'équilibre.

Selon la mécanique statistique la probabilité qu'un système se trouve dans un état d'énergie U et proportionnel à $e^{-U/kT}$. Or, l'énergie d'une particule se déplaçant dans un champ magnétique est donnée par l'énergie potentielle habituelle plus l'énergie cinétique $1/2mv^2$, sans qu'il soit nécessaire d'ajouter explicitement quoi que ce soit lié au champ magnétique. En fait, la force dans un champ électromagnétique est donnée par $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, le travail - qui est lié à l'énergie - est exprimé par $\vec{F} \cdot \vec{v}$ et se réduit en conséquence à $q\vec{E} \cdot \vec{v}$ et ne dépend pas du champ magnétique.² Comme la probabilité d'être dans un état spécifique dépend uniquement de l'énergie, c'est-à-dire de la position et de la vitesse, il en résulte que celle-ci est la même indépendamment de la présence ou de l'absence d'un champ magnétique. Si nous avons alors deux systèmes, l'un dans un champ magnétique et l'autre non, la distribution des probabilités des états du système est la même dans les deux cas. Si, dans le premier système, la valeur moyenne du moment magnétique est égale à zéro, elle doit être identique pour le second système car le mouvement des particules est en moyenne le même. Par conséquent, classiquement, il ne peut pas exister un moment magnétique induit par un champ magnétique externe.

Pendant, résoudre le problème avec la mécanique classique n'est pas totalement inutile. Elle peut nous donner une vision partielle de ce qui se passe dans la matière et fournit des résultats utiles d'un point de vue concret. L'application de la mécanique classique aux problèmes du magnétisme suit également la voie historique : les premiers chercheurs de phénomènes magnétiques ne disposaient que des lois classiques. Il est donc intéressant de suivre leur raisonnement.

Dans ce qui suit, nous nous baserons sur le modèle atomique de Rutherford traité selon la mécanique newtonienne.

L'électron qui tourne autour du noyau peut être considéré comme une spire parcourue par un courant. Le courant est défini comme la quantité de charge par unité de temps et dans le cas présent la charge électrique est la charge de l'électron e et l'unité de temps est donnée par la période de révolution de l'électron autour du noyau.

Nous allons maintenant calculer la valeur du courant atomique en utilisant l'atome d'hydrogène comme modèle. Pour ce faire, nous devons calculer le temps de révolution des électrons. Nous considérons donc un électron en orbite circulaire autour d'un noyau atomique. La force ressentie par l'électron est la force de Coulomb et le deuxième principe de dynamique s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} = m_e \vec{a} = m_e \omega_0^2 r_0 = \frac{4\pi^2}{T_0^2} m_e r_0$$

d'où le temps de révolution atomique de l'électron T_0 :

$$T_0 = \frac{4\pi}{e} \sqrt{\pi\epsilon_0 m_e r_0^3}$$

Afin de calculer cette valeur, nous devons connaître le rayon atomique r_0 . Grâce au théorème du viriel, on sait que dans un système lié par un potentiel dépendant de l'inverse du carré de la distance la relation suivante est vraie :

$$2\langle T \rangle = -\langle U \rangle$$

d'où l'énergie totale $T + U = U/2$, ce qui dans notre cas fournit :

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2}$$

d'où :

$$r_0 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 U}$$

Or, l'énergie potentielle est équivalente au travail nécessaire pour amener l'électron de l'état lié à l'infini (où $U = 0$) inversé de signe, mais cela coïncide avec le travail d'extraction.³ Cette quantité

2. Cela ne doit pas nous surprendre. Nous avons déjà souligné le fait que la force de Lorentz n'effectue pas de travail.

3. C'est-à-dire, l'énergie nécessaire pour ioniser un atome d'hydrogène.

peut être mesurée de manière expérimentale et sa valeur est $-21,6 \times 10^{-19} \text{J}$,⁴ il s'ensuit :

$$r_0 = \frac{2.567 \times 10^{-38}}{25.13 \cdot 8.854 \times 10^{-12}} \frac{1}{21.6 \times 10^{-19}} = 0.5 \times 10^{-10} \equiv 0.5 \text{Å}$$

en remplaçant cette valeur dans l'expression de la période orbitale, nous obtenons :

$$T_0 = \frac{12.566}{1.602 \times 10^{-19}} \sqrt{3.14 \cdot 8.854 \times 10^{-12} \cdot 9.11 \times 10^{-31} \cdot 1.25 \times 10^{-31}} = 1.52 \times 10^{-16} \text{s}$$

ce résultat nous permet de calculer le courant atomique généré par le mouvement de l'électron :

$$I_a = \frac{e}{T_0} = \frac{1.602 \times 10^{-19}}{1.52 \times 10^{-16}} \simeq 1 \text{mA}$$

Le moment magnétique défini par $\vec{m} = I\vec{S}$ nous donne :

$$m = I_a \pi r_0^2 = \frac{e}{T_0} \pi r_0^2$$

et il est dirigé perpendiculairement au plan défini par l'orbite. Le moment angulaire de l'électron défini par $\vec{l} = m_e \vec{r}_0 \times \vec{v}$ est également dirigé perpendiculairement au plan de l'orbite et il est donc dirigé le long de la même direction que le moment magnétique. Sa valeur est donnée par :

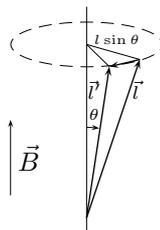
$$l = m_e r_0 v_0 = m_e \frac{2\pi r_0}{T_0} r_0$$

cela comparé à l'expression du moment angulaire permet d'écrire :

$$\vec{m} = \frac{e}{2m_e} \vec{l}$$

autrement dit, que le moment magnétique est proportionnel et antiparallèle (en raison du signe négatif implicite dans e) au moment angulaire, le facteur de proportionnalité est appelé *facteur gyromagnétique*. Ce résultat est assez général et se révèle valable également en mécanique quantique.

La conséquence immédiate de ce fait est que les moments angulaire et magnétique sont parallèles est qu'un atome ayant un moment magnétique immergé dans un champ magnétique doit précéder. Généralement, le moment \vec{m} ne sera pas aligné avec le champ \vec{B} , nous sommes donc dans la situation montrée dans la figure suivante :



Le moment magnétique \vec{m} est soumis à un couple $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ (selon la (5.17)) qui cherche à l'aligner avec le champ \vec{B} . Mais le fait que le champ ne soit pas parfaitement aligné sur le moment magnétique et que le moment \vec{m} soit parallèle au moment angulaire \vec{l} font de l'atome un gyroscope. En conséquence, \vec{l} et donc \vec{m} précèdent autour de \vec{B} . Supposons que, dans un intervalle de temps Δt , le moment angulaire passe de \vec{l} à \vec{l}' en maintenant le même angle θ par rapport à \vec{B} . Si ω_L est la vitesse de précession, l'angle de précession dans le temps Δt est donné par $\omega_L \Delta t$. La variation du moment angulaire est donc :

$$\Delta l = (l \sin \theta)(\omega_L \Delta t)$$

4. Ou $-13,6 \text{ eV}$.

la variation du moment angulaire doit être égale au couple appliqué :⁵

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \omega_L l \sin \theta = \vec{m} \times \vec{B}$$

d'où $\omega_L = l/mB$, ou :

$$\omega_L = \frac{eB}{2m_e}$$

qui s'appelle *fréquence de Larmor*. Le fait que le moment magnétique précède reste valable également en mécanique quantique, même si l'interprétation sera alors différente.

Poursuivant notre raisonnement classique, un courant d'électrons est associé au mouvement de révolution de l'électron et le mouvement de précession du moment magnétique est associé à un courant appelé *courant de Larmor*.⁶ Ce courant est dû à la charge de l'électron qui se déplace de manière circulaire avec une fréquence de ω_L :

$$I_L = \frac{e\omega_L}{2\pi} = \frac{e^2 B}{4\pi m_e}$$

associé à ce courant, nous aurons donc un *moment orbital de Larmor* qui aura une direction opposée par rapport à \vec{B} et au moment orbital, cela dû au signe négatif contenu dans la charge électronique et qui est :⁷

$$m_L = I_L S_L = -\frac{e^2 B}{4\pi m_e} \pi \langle r^2 \rangle = -\frac{e^2 B}{4\pi m_e} \pi \frac{2}{3} r^2 = -\frac{e^2 r^2}{6m_e} B \quad (6.1)$$

où $\pi \langle r^2 \rangle$ est la surface moyenne perpendiculaire au champ magnétique \vec{B} et qui vaut $\langle r^2 \rangle = 2/3r^2$. S'il s'agit d'atomes à plusieurs électrons, il faut ajouter un facteur Z dans la relation ci-dessus :

$$m_L = -\frac{Ze^2 r^2}{6m_e} B$$

L'étude du champ magnétique dans la matière ressemble en quelque sorte à celui du champ électrostatique en présence de diélectriques. Dans ce cas-là, nous avons introduit un vecteur de polarisation électrique \vec{P} et réécrit l'équation de Maxwell correspondante en explicitant la présence de charges de polarisation. Dans le cas présent, nous allons introduire un vecteur moment magnétique par unité de volume et une densité de charge magnétique, afin de garder l'analogie $\nabla \cdot \vec{M} = \rho_m$.⁸ Cependant, nous savons que les charges magnétiques n'existent pas sous une forme isolée et grâce au théorème d'Ampère nous savons qu'il s'agit des courants atomiques responsables du moment magnétique de la matière. Nous allons donc ensuite introduire la présence de courants atomiques dans les équations au lieu des charges. Ces courants étant généralement inconnus, nous devons rechercher une relation entre ceux-ci et un vecteur macroscopique mesurable, équivalent au vecteur de polarisation électrique, appelé *vecteur de polarisation magnétique*. Ce qui rend le traitement du magnétisme plus complexe, c'est que ce vecteur est fortement dépendant du champ d'induction magnétique \vec{B} . Afin de résoudre les équations nous devons donc trouver une relation entre ce vecteur et le vecteur d'induction magnétique, et c'est précisément cette relation qui sera complètement différente pour les matériaux diamagnétiques, paramagnétiques et ferromagnétiques.

5. Rien d'autre que l'application de la deuxième loi de la dynamique.

6. Courant qui se super-impose au courant orbital.

7. Ici, nous avons besoin d'une petite explication. Nous avons montré plus haut qu'un moment magnétique atomique est antiparallèle au moment cinétique et par conséquent à \vec{B} . Ce résultat a une validité générale, car la valeur *numérique* du moment de Larmor s'avère être proportionnelle à e^2 , mais nous y plaçons tout de même un signe moins.

8. Ceci a également été le chemin emprunté historiquement.

6.2 Polarisation Magnétique

L'étude des courants microscopiques au sein d'un matériau est évidemment très complexe, mais heureusement dans la plupart des cas nous nous intéressons au champs en dehors du matériau ou à une moyenne macroscopique de ce qui se passe à l'intérieur de la matière. Dans ces cas, et seulement dans ces cas-là, il convient de décrire l'état magnétique de la matière par un moment dipolaire moyen par volume, qui sera donc une fonction continue des coordonnées.

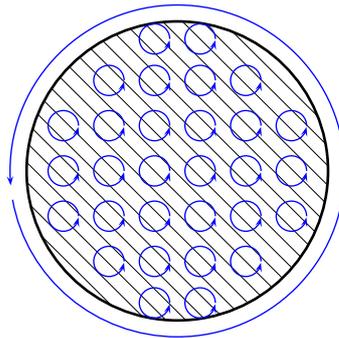
Nous définissons *vecteur de polarisation magnétique* la moyenne macroscopique dans un volume ΔV des vecteurs de moment magnétique \vec{m}_i atomique :

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \vec{m}_i}{\Delta V}$$

Notre objectif est maintenant de trouver une relation entre ce vecteur macroscopique et les courants atomiques. En tenant compte de la quatrième équation de Maxwell (5.12), nous séparons la contribution des courants à droite de l'équation en une composante atomique et une due aux courants du circuit :⁹

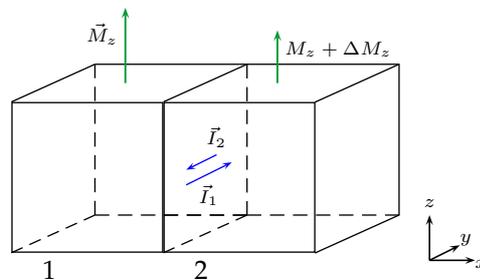
$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{cond.}} + \vec{j}_{\text{mag.}}$$

Considérons un cylindre immergé dans un champ magnétique aligné avec son axe. Les dipôles magnétiques atomiques seront alors pour la plupart orientés avec le champ magnétique et la disposition des courants atomiques peut être imaginée comme dans la figure suivante.



Il est évident qu'en aucun point du cylindre, aucun courant ne sera présent car pour chaque contribution d'un courant il existe une contribution opposée provenant d'un autre courant. En surface, cependant, les contributions se somment et donnent lieu à un courant de surface qui circule toujours dans la même direction. Un cylindre magnétisé uniformément dans un champ magnétique se comporte donc comme un solénoïde sous tension.

Prenons le cas où l'aimantation n'est pas uniforme dans le matériau. Cela signifie que pour deux éléments de volume contigus $\vec{M}(x, y, z)$ et $\vec{M}(x, y, z + dz)$ ne sont pas égaux. Pour comprendre ce qui se passe dans ce cas, regardons la figure suivante.



9. Pour être plus précis, nous devrions également prendre en compte les courants de polarisation provenant du mouvement des charges de polarisation du diélectrique lorsque celui-ci est immergé dans un champ variable. Mais pour l'instant, nous ne nous occuperons pas de cela.

On peut penser que les deux vecteurs $\vec{M}(x, y, z)$ et $\vec{M}(x, y, z + dz)$ sont dus à un courant électrique circulant autour des faces dx et dy des volumes cubiques 1 et 2. Le moment magnétique d'un petit volume, à partir de la définition de la polarisation magnétique, est donné par :

$$m = M_z dx dy dz$$

mais ceci, en rappelant la définition du moment magnétique d'une spire $m = IS$, peut être écrit de manière générique comme :

$$m = M_z dx dy dz = I dx dy \quad I = M_z dz$$

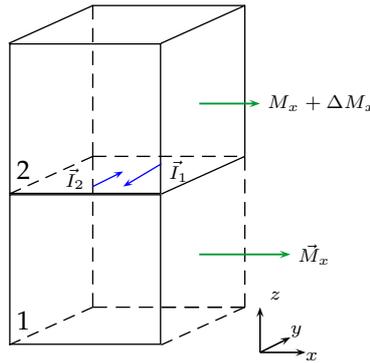
Sur la surface partagée par les deux volumes, le courant actuel sera donné par $I_1 - I_2$, nous pouvons donc écrire :

$$I = I_1 - I_2 = M_z dz - (M_z + \Delta M_z) dz = -\frac{\partial M_z}{\partial x} dx dz$$

la densité du courant le long de la direction y est donnée par :¹⁰

$$j_y = \frac{I}{dx dz} = -\frac{\partial M_z}{\partial x}$$

Il y a une autre contribution au courant dans la direction y qui provient cette fois d'un petit volume superposé :



En répétant le raisonnement ci-dessus, le moment contenu dans le petit volume peut être exprimé sous la forme $M_x dx = I$ et, par conséquent, la composante le long de y en accord avec le précédent est exprimée par :

$$I_2 - I_1 = (M_x \Delta M_x) dz - M_x dz = \frac{\partial M_x}{\partial z} dz dx$$

la densité de courant le long de la direction y est donnée par :

$$j_y = \frac{I}{dx dz} = \frac{\partial M_x}{\partial z}$$

finalement, la contribution totale au courant microscopique j_y le long de l'axe y est exprimé par :

$$j_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}$$

Le raisonnement peut être répété pour les deux autres directions, on obtient ainsi la relation entre les courants atomiques et le vecteur de polarisation magnétique :

$$\boxed{\vec{j}_{\text{mag.}} = \vec{\nabla} \times \vec{M}} \quad (6.2)$$

10. $dx dz$ est la surface de la face orientée le long de y .

Une manière plus formelle de dériver la relation entre les courants atomiques et la polarisation magnétique

Nous allons maintenant formuler formellement les relations entre les courants atomiques de volume et de surface avec le vecteur de polarisation magnétique. Dans ce qui suit, nous utiliserons la même approche formelle que celle utilisée dans le cas de la polarisation électrique dans §3.2 à pag. 44.

Pour ce faire, nous allons calculer le vecteur potentiel en un point $\vec{r} = (x, y, z)$ généré par un élément de volume \mathcal{V} avec aimantation $M(x, y, z)$. De la relation (5.16) nous dérivons :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_r \frac{I d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

en supposant que la spire soit petite par rapport aux distances ($r' \ll r$) et qu'elle soit centrée dans l'origine des coordonnées, on obtient :¹¹

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_r \frac{I d\vec{l}'}{|\vec{r}|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \times d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \times \vec{S}$$

mais $\vec{\nabla}(1/r) = -\vec{r}/r^3$, d'où :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(-\vec{r}) \times \vec{S}}{r^3} = \frac{\mu_0 I \vec{S} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \equiv \frac{\mu_0 \vec{M} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

Dans le cas présent, pour obtenir le potentiel vectoriel au point \vec{r}' , nous devons intégrer les volumes infinitésimaux qui apportent un moment m :

$$\vec{A}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{d\vec{m} \times (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}$$

mais le moment dans le volume $d\mathcal{V}$ peut être exprimé en tant que $m = \vec{M}(\vec{r})d\mathcal{V}$, donc :

$$\vec{A}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{M}(\vec{r}) \times (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} d\mathcal{V}$$

en se rappelant maintenant que :

$$\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

nous obtenons :

$$\vec{A}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \vec{M} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

De la propriété mathématique, qui découle directement des propriétés de dérivés, $(\vec{v} \times \vec{\nabla})f = f(\nabla \times \vec{v}) - \vec{\nabla} \times (f\vec{v})$, avec $\vec{v} = \vec{A}$ et $f = 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ nous pouvons écrire :

$$\vec{A}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\nabla} \times \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

ce qui équivaut à :¹²

$$\vec{A}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\nabla} \times \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS$$

11. La relation intégrale est appliquée :

$$\int_S \vec{\nabla} f \times d\vec{S} = - \int_l f d\vec{l}$$

12. Nous avons utilisé le théorème :

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \times \vec{v} d\mathcal{V} = - \int_S \vec{v} \times d\vec{S}$$

En se rappelant la relation (5.15), où nous séparons la contribution dû au volume de la contribution superficielle, nous obtenons :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}^{(v)}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}^{(s)}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS$$

par comparaison on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{J}_{\text{mag}}^{(v)} &= \vec{\nabla} \times \vec{M} \\ \vec{J}_{\text{mag}}^{(s)} &= \vec{M} \times \hat{n} \end{aligned}}$$

6.3 Les équations de la magnétostatique dans la matière

Considérons maintenant la quatrième équation de Maxwell (5.12) et séparons le composant du courant dû aux conducteurs et le composant provenant des courants atomiques et explicitant ce dernier par moyen de la (6.2) :¹³

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{j}_{\text{mag}}) = \mu_0 (\vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{M}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

qui peut être écrite dans la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \left(\frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

Définissant *vecteur champ magnétique* \vec{H} le terme :

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} \quad (6.3)$$

nous remarquons que sous la forme $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ nous mettons en évidence le fait que l'induction magnétique est due à deux contributions : la première provenant du champ magnétique dans la matière et l'autre par l'aimantation de la matière elle-même. En termes plus précis, *le champ d'induction magnétique* \vec{B} , qui apparaît dans l'écriture de la force agissant sur les charges, est composé d'une contribution \vec{M} due à la magnétisation de matière et une contribution des courants libres \vec{H} .

En termes de \vec{H} , la quatrième équation est réécrite comme suit :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

et les équations de la magnétostatique dans la matière deviennent formellement identiques à celles du vide :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} \end{cases}$$

Même s'ils ont les mêmes dimensions physiques (ils se réfèrent à la même quantité physique) \vec{B} et \vec{H} utilisent pourtant des unités de mesure ayant des noms différents. On dit donc que le champ \vec{B} est mesuré en Tesla et le champ \vec{H} est mesuré en Ørsted, même si les deux unités correspondent en réalité à Weber/m².

Nous pouvons écrire pour le champ \vec{H} une relation similaire à la (5.11). Pour ce faire, nous calculons le flux de \vec{J} à travers d'une surface générique S et en utilisant le Théorème de Stokes sur le deuxième membre :

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{H} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

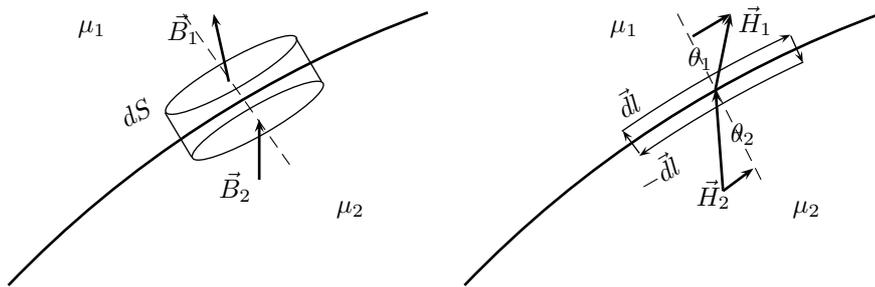
13. Nous indiquons avec \vec{J} le terme indiqué précédemment avec \vec{j}_{cond} , le courant dans les conducteurs, afin de simplifier la notation.

mais l'intégrale $\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ correspond à la somme des courants entrant dans la surface S , donc :

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N I_i \quad (6.4)$$

Il est évident que pour le champ \vec{H} le raisonnement qui nous a amenés à conclure que la circulation ne dépend pas de la surface S choisie, mais seulement du contour l qui le définit, garde sa validité.

Comme pour les diélectriques, les équations que nous avons écrites s'appliquent à toutes les régions mais ne peuvent pas être étendues à tout l'espace car il y a des discontinuités sur les surfaces de séparation. Il est donc nécessaire d'associer ces équations aux conditions aux limites tel que nous l'avons fait pour le champ électrique dans les diélectriques.



En gardant à l'esprit que le flux de \vec{B} à travers une surface est nul et que \vec{H} le long d'une ligne fermée qui n'inclut pas les courants \vec{B} et aussi nul, on obtient des relations :

$$\Phi(\vec{B}) = dS\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 + dS\vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2 = dSB_{\perp 1} - dSB_{\perp 2} = dS(B_{\perp 1} - B_{\perp 2}) = 0$$

où B_{\perp} indique la composante perpendiculaire à la surface dS , parallèle à la normale \hat{n} et en tenant compte du fait que les deux normales sont orientées en sens inverse (si le vecteur \vec{B}_2 entre dans le cylindre alors \vec{B}_1 en sort). De cette relation, nous obtenons que la composante de \vec{B} normale à la surface ne souffre pas de discontinuité.

Considérons maintenant le chemin fermé représenté dans la figure de droite, dont les segments latéraux sont infinitésimaux d'un ordre supérieur. Selon le raisonnement précédent, comme la circulation doit être nulle, il s'ensuit que la composante parallèle du champ électrique ne subit pas de discontinuité :

$$\vec{H} \cdot d\vec{l} - \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow H_{\parallel 1}dl - H_{\parallel 2}dl = 0 \rightarrow H_{\parallel 1} = H_{\parallel 2} \quad (6.5)$$

autrement dit que à travers la surface de séparation de deux diélectriques la composante parallèle à la surface du champ magnétique ne subit pas de discontinuité.

Nous remarquons maintenant que dans les matériaux qui ne sont pas des aimants permanents, le champ de polarisation magnétique \vec{M} parallèle au champ appliqué \vec{B} et proportionnel à celui-ci et par conséquent l'équation (6.3) nous dit que \vec{B} et \vec{H} sont proportionnels $\vec{B} = \mu\vec{H}$, où μ prend le nom de perméabilité magnétique. Il suit :

$$H_{\parallel 1} = H_{\parallel 2} \rightarrow \frac{B_{\parallel 1}}{\mu_1} = \frac{B_{\parallel 2}}{\mu_2}.$$

Le rapport de la tangente et de la composante perpendiculaire nous donne l'angle qui forme le vecteur \vec{B} par rapport à la normale à la surface, d'où la loi de réfraction pour le champ \vec{B} .

$$\frac{B_{\parallel 1}}{B_{\perp 1}} \frac{B_{\perp 2}}{B_{\parallel 2}} = \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

La constante de perméabilité magnétique est souvent exprimée en termes de la constante de perméabilité magnétique du vide $\mu = \mu_r \mu_0$, où μ_r est un paramètre adimensionnel appelé constante de

perméabilité magnétique relative. Dans le vide $\mu_r = 1$, dans l'air la valeur est pratiquement la même : $\mu_r = 1.00000037$.

Si l'un des deux éléments est l'air, alors appelé θ_0 l'angle d'incidence par rapport à la perpendiculaire du champ \vec{B} la relation précédente est simplifiée de la façon suivante :

$$\frac{\tan \theta_0}{\tan \theta} = \frac{\mu_0}{\mu} = \frac{1}{\mu_r} \quad \Rightarrow \quad \tan \theta = \mu_r \tan \theta_0$$

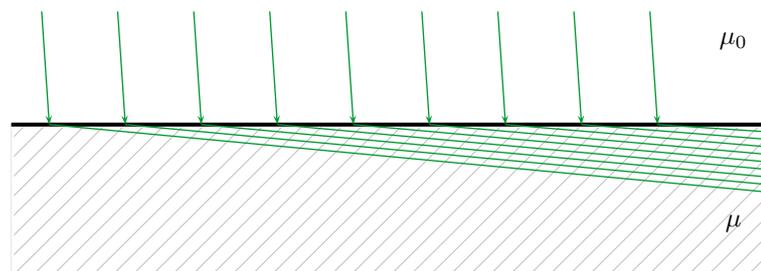
Il est possible de créer des matériaux avec une perméabilité magnétique élevée et cela conduit à un certain nombre de propriétés intéressantes. A titre d'exemple, nous présentons un tableau succinct de quelques matériaux qui présentent la perméabilité relative la plus élevée.

Matériel	μ_r
Nichel	100 → 600
Ferrite	>640
Permalloy	8000
Mu-metal	50000
Nanoperm	80000
Metglas	10^6

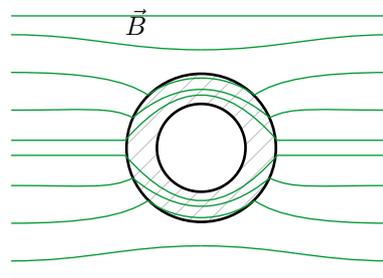
Considérons une surface de séparation air/métal et un angle d'incidence de 5° .

$$\tan \theta = \mu_r \tan \theta_0 = 50000 \times \tan 5^\circ = 50000 \times 0.0875 = 4374$$

ce qui correspond à un angle de $89,98^\circ$. Comme le montre la figure suivante, cela signifie que les lignes de champ magnétique dans un matériau à haute perméabilité sont pratiquement parallèles à la surface de séparation et cela indépendamment de l'angle d'incidence sur la surface (l'effet est en réalité beaucoup plus marqué que dans la figure) :



Le fait que dans les matériaux hautement perméables les lignes de champ magnétique soient pratiquement parallèles à la surface de séparation implique également que *le champ magnétique reste confiné dans le matériau*. Si le matériau a la forme d'un tube ou présente une cavité interne, le champ magnétique est absent ou très faible dans l'espace interne :



C'est sur ce principe qui sont basés les *écrans magnétiques*, utilisés par exemple en physique des particules.¹⁴ Sur ce principe est également basée la théorie des circuits magnétiques, de la quelle nous ne parlerons pas en ce cours.

14. Un écran cylindrique en mu-métal est utilisé par exemple systématiquement pour protéger les photo-multiplieurs afin d'empêcher les champs magnétiques externes d'affecter les trajectoires des électrons.

6.4 Comportement des matériaux dans un champ magnétique

Avant de pouvoir analyser le comportement de la matière dans un champ magnétique, nous devons encore faire quelques observations sur le comportement microscopique de la matière.

La polarisation induite par le champ \vec{B} est due à l'orientation de dipôles magnétiques microscopiques. On peut donc appliquer le même raisonnement du §3.5.2, où cette fois le terme énergétique du dipôle vaut $\vec{m} \cdot \vec{B} = mB \cos \theta$:

$$\mathcal{P}(U) = A e^{-\frac{U}{kT}} = \frac{1}{4\pi} e^{\frac{mB \cos \theta}{kT}}$$

d'où la probabilité que le dipôle soit orienté dans une fine couronne circulaire d'angle solide $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$:

$$d\mathcal{P} = \mathcal{P}(U(\theta))d\Omega = \mathcal{P}(U(\theta))2\pi \sin \theta d\theta = A e^{\frac{mB \cos \theta}{kT}} 2\pi \sin \theta d\theta$$

Cependant, contrairement à ce qui a été fait dans le cas de la polarisation électrique, il n'est pas possible dans le cas présent de développer en série l'argument de l'exponentielle $\frac{mB \cos \theta}{kT}$ ⁽¹⁵⁾ car l'énergie magnétique en jeu peut être importante. Cela implique que la constante de normalisation A doit maintenant être calculée comme suit :

$$A = \frac{1}{\int_0^\pi e^{\frac{mB \cos \theta}{kT}} 2\pi \sin \theta d\theta}$$

Si le matériau est isotrope, hypothèse simplificatrice qui est toujours faite, la distribution présente une symétrie cylindrique autour de l'angle θ formé avec la direction de \vec{B} et par conséquent la valeur moyenne de $m \cos \theta$, la seule composante différente de zéro, est donnée par :

$$\langle m \rangle = \langle m \cos \theta \rangle = \frac{\int_0^\pi m \cos \theta e^{\frac{mB \cos \theta}{kT}} 2\pi \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\frac{mB \cos \theta}{kT}} 2\pi \sin \theta d\theta}$$

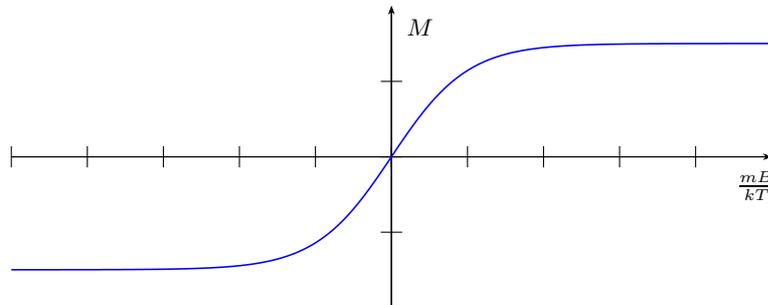
Cette intégrale peut être résolue par substitution avec $y \equiv mB/kT$ et $x \equiv \cos \theta$:

$$\langle m \rangle = m \frac{\int_{-1}^1 x e^{yx} dx}{\int_{-1}^1 e^{yx} dx} = m \left(\coth y - \frac{1}{y} \right) \equiv L(y)$$

où la fonction :

$$L\left(\frac{mB}{kT}\right) = m \left(\coth \frac{mB}{kT} - \frac{kT}{mB} \right) \quad (6.6)$$

est appelé *fonction de Langevin* et dont la figure ci-dessous en montre le comportement.



15. Cela n'est pas *toujours* possible. C'est possible pour les matériaux paramagnétiques, mais pas dans le cas des matériaux ferromagnétiques.

D'un point de vue macroscopique, il est préférable d'introduire un paramètre donnant une mesure de la différence de la perméabilité par rapport au vide, un paramètre qui est appelé *susceptibilité magnétique* et qui est défini comme étant :

$$\chi_m = \mu_r - 1$$

6.4.1 Diamagnétisme

Les éléments dont les atomes n'ont pas de moment magnétique propre¹⁶ ne peut être affectée par le champ magnétique que par la précession de Larmor. Par conséquent, l'interaction est faible et de signe opposé au champ magnétique, ces matériaux sont donc rejetés par le champ et on parle de *diamagnétisme*.

Dit n le nombre d'atomes par unité de volume, le moment magnétique dû à la précession de Larmor est exprimé selon le (6.1) par :

$$M = -\frac{Ze^2r^2}{6m_e}B_l = -\mu_0\frac{Ze^2r^2}{6m_e}H_l \quad (6.7)$$

où par l'indice l nous entendons le champ local qui agit sur l'atome en question, à l'instar de ce qui a été fait dans le §3.2.1 pour la polarisation électrique.

En procédant de la même manière, le champ macroscopique H peut être considéré comme la somme du champ généré par l'atome et du champ généré par le reste de la matière. Si l'on considère le champ généré par l'atome comme celui d'une sphère uniformément magnétisée :

$$H = H_l + H_{\text{sphère}} \quad \rightarrow \quad H_l = H - H_{\text{sphère}}$$

Le courant de magnétisation de surface nous avons vu être $\vec{M} \cdot \hat{n}$, la composante normale à la surface s'écrit $M \cos \theta$. La contribution de cette magnétisation au centre de la sphère est :¹⁷

$$dH = -\frac{1}{4\pi} \frac{j_{\text{mag}}^{(s)}}{r^2} dA \hat{n}$$

où r est le rayon de la sphère entourant l'atome – que l'on peut penser de taille atomique – et dA est l'élément de surface sur la sphère. Mais dA/r^2 correspond à l'élément d'angle solide $d\Omega$, donc :

$$dH = -\frac{1}{4\pi} M \cos \theta \hat{n}$$

la valeur du champ au centre de la sphère est obtenue en intégrant toute la surface, c'est-à-dire :

$$H_{\text{sphère}} = \int_{\text{sphère}} dH = -\frac{M}{4\pi} \int \cos^2 \theta d\Omega = \frac{M}{2} \int_{-1}^{+1} \cos^2 \theta d(\cos \theta) = -\frac{M}{6} \cos^2 \theta \Big|_{-1}^1 = -\frac{M}{3} \quad (6.8)$$

et en remplaçant ce résultat par l'expression de la polarisation magnétique (6.7) nous obtenons :

$$M = -\mu_0 \frac{Ze^2r^2}{6m_e} \left[H + \frac{M}{3} \right]$$

et en plaçant pour simplicité $\alpha \equiv -\mu_0 \frac{Ze^2r^2}{6m_e}$:

$$M = \alpha \left[H + \frac{M}{3} \right] \quad \rightarrow \quad M - \frac{\alpha}{3} M = \alpha H \quad \rightarrow \quad H = \frac{3 - \alpha}{\alpha} M$$

16. La raison pour laquelle certains atomes ont un moment magnétique intrinsèque différent des autres est un sujet dont l'explication ne peut être donnée que dans le domaine de la mécanique quantique appliquée aux systèmes atomiques comportant plus d'électrons. Cet argument est évidemment bien au-delà du niveau de ce cours, aussi cette affirmation doit être acceptée ici comme un fait.

17. Nous considérons la contribution au centre de la sphère parce que la sphère est suffisamment petite pour considérer la valeur médiane au centre. En revanche, à l'intérieur d'une sphère à magnétisation uniforme, nous verrons que cette valeur est constante.

Comme on peut le constater, le moment magnétique est dans ce cas indépendant de la température et, comme il est orienté dans le sens opposé au champ magnétique, le matériau est repoussé par le champ magnétique.

Il est évident que le moment magnétique dû à la précession de Larmor est présent dans tous les matériaux. Toutefois, dans le cas des matériaux paramagnétiques et ferromagnétiques, d'autres facteurs entrent en jeu pour masquer le diamagnétisme du matériau.

Comme le moment magnétique n'est dû qu'à la précession de Larmor, il est aligné sur le champ extérieur et – pour ce qui est dit ci-dessus – la relation $\vec{B} = \mu\vec{H}$ est valide. La relation (6.3) en est donc simplifiée :

$$H = \frac{\mu H - \mu_0 M}{\mu_0} \rightarrow H(\mu - \mu_0) = \mu_0 M \rightarrow \mu_0(\mu_r - 1)H = \mu_0 M \rightarrow \mu_0 \chi_m H = \mu_0 M$$

ou en fin de compte :

$$\boxed{\vec{M} = \chi_m \vec{H}} \quad (6.9)$$

ou l'équivalent :

$$\begin{aligned} \mu \vec{N} &= \chi_m \vec{B} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} \end{aligned}$$

6.4.2 Paramagnétisme

Si les atomes du matériau ont leur propre moment magnétique, mais que la structure du matériau est telle qu'il n'est pas possible d'avoir des champs de haute intensité à l'intérieur, alors le moment magnétique est parallèle au champ extérieur et par conséquent ces matériaux sont faiblement attirés par le champ magnétique. On parle donc de *paramagnétisme*.

Étant le moment magnétique faible, le raisonnement qui nous a conduit à la (6.8) est toujours valable même si le résultat implique le signe inverse.¹⁸ La différence dans le cas présent consiste dans la relation entre le vecteur \vec{M} et le vecteur \vec{B} qui doit être calculée selon la distribution statistique (c'est un moment magnétique intrinsèque à l'atome et non dû à un mouvement de précession angulaire) et donc donnée par la (6.6). Dans ce cas, cependant, en raison des faibles moments magnétiques en jeu, cette fonction peut être approximée au premier ordre. Sachant que le vecteur de magnétisation s'exprime en fonction du moment magnétique moyen élémentaire sous la forme $\vec{M} = n\langle m \rangle$ avec n nombre de moments par unité de volume, les relations à utiliser dans ce cas sont les suivantes :

$$\begin{aligned} H_l &= H + \frac{1}{3}M \\ M &= n\langle m \rangle = m \left(\coth \frac{mB}{kT} - \frac{kT}{mB} \right) \simeq \frac{1}{3}nm \frac{mB}{kT} \end{aligned}$$

en gardant à l'esprit que dans ce cas le moment \vec{M} est parallèle à \vec{H} car il tend à s'aligner avec lui et que la relation $\vec{B}_l = \mu_0 \vec{H}_l$ est toujours valable, nous avons :

$$M = \frac{1}{3}n \frac{m^2 B}{kT} = \frac{1}{3}n \frac{\mu_0 m^2}{kT} H_l \equiv \alpha H_l$$

d'où :

$$\frac{1}{\alpha} M = H + \frac{1}{3}M \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3} \right) M = H \Rightarrow M = \frac{3\alpha}{3 - \alpha} H$$

Ici encore $\alpha \ll 1$, donc la relation $M \simeq \alpha H$ et toujours valable et permet de conclure que la susceptibilité magnétique pour un matériau paramagnétique peut s'écrire :

$$\chi_m \simeq \frac{nm^2 \mu_0}{3kT}$$

18. Évidemment, parce que le moment magnétique est orienté selon le champ magnétique contrairement à la précession de Larmor.

Ce résultat est conforme à la loi de Curie déterminée expérimentalement en 1895, qui stipule que la susceptibilité magnétique d'un matériau paramagnétique varie inversement à la température absolue et proportionnellement à la densité.¹⁹

6.4.3 Ferromagnétisme

Dans les matériaux ferromagnétiques, la relation entre \vec{B} et \vec{H} est extrêmement complexe, généralement non univoque, dépend de l'histoire passée et elle est différente pour chaque matériau. La relation entre \vec{M} et \vec{B} est donnée par la fonction de Langevin (6.6), qui dans le cas présent ne peut plus être approximée. Il est donc évident qu'il s'agit d'un sujet difficile à traiter de manière analytique. La relation $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ est en revanche toujours valable.

Afin de poursuivre notre discussion, nous devons nous appuyer sur certains résultats expérimentaux. Tout d'abord, la relation (6.8) n'est pas valable. Le champ dans la matière n'est jamais négligeable, c'est pourquoi nous supposons une relation de ce type :

$$\vec{H}_l = \vec{H} + \gamma \vec{M} \quad \rightarrow \quad \vec{M} = \frac{\vec{H}_l - \vec{H}}{\gamma}$$

où γ est appelé constante de Weiss et prend des valeurs très élevées de l'ordre de 10^3 - 10^4 , ce qui nous permet de conclure que le champ \vec{H} à l'intérieur des matériaux ferromagnétiques est essentiellement déterminé par une magnétisation spontanée. Cette relation doit avoir solution simultanément à la (6.6), il est donc utile de l'exprimer en termes de la même variable $y \equiv mB/kT$, ce qui nous permet d'expliquer la dépendance de la température :²⁰

$$M = \frac{H_l - H}{\gamma} = \frac{B_l/\mu_0 - H}{\gamma} = \frac{\frac{kT}{\mu_0} y - H}{\gamma} = \frac{kT}{m\mu_0\gamma} y - \frac{H}{\gamma}$$

Nous sommes donc amenés à résoudre le système :

$$\begin{cases} M = nm \left(\coth y - \frac{1}{y} \right) \\ M = \frac{kT}{m\mu_0\gamma} y - \frac{H}{\gamma} \end{cases} \quad (6.10)$$

La deuxième équation représente une ligne droite de coefficient d'angle $\frac{kT}{m\mu_0\gamma}$ et intercepte l'axe y en $-H/\gamma$. Les solutions de ce système, représentées par les points d'intersection des deux graphiques, dépendent fortement de la pente de cette ligne. La première étape consiste donc à établir l'orientation de cette ligne par rapport à la fonction de Langevin. Pour ce faire, considérons la pente du $L(y)$ en $y = 0$:²¹

$$nm \frac{dL}{dy} \Big|_{y=0} \simeq \frac{nm}{3}$$

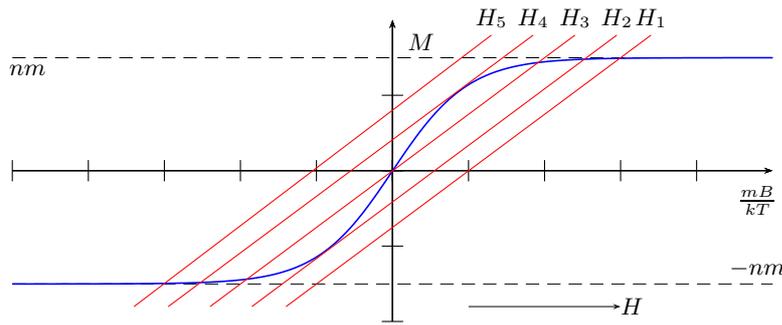
La valeur de γ étant très élevée, il s'ensuit que la pente de la ligne droite est généralement inférieure à celle de la courbe de Langevin à l'origine. Cela donne naissance au système dont les solutions sont représentées graphiquement dans la figure suivante.

19. La dépendance de la densité provient de n , le nombre d'atomes par unité de volume. Cette loi fut établie par Pierre Curie sous la forme :

$$\chi_m = \frac{C_g}{T}$$

20. La considération que tous ces vecteurs sont alignés nous permet d'éliminer le signe du vecteur dans les équations suivantes.

21. Nous avons considéré la dérivée du développement en série et nous nous sommes arrêtés au premier ordre.

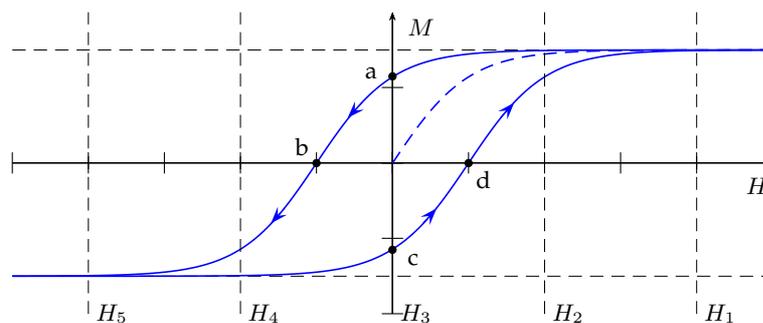


Dans ce graphique, le champ d'induction magnétique \vec{B} (et par conséquent le champ magnétique appliqué \vec{H}) diminue au fur et à mesure que l'on avance de la droite vers la gauche. Pour les champs élevés (de H_1 à H_2), il n'y a qu'une seule solution au système et donc la relation entre \vec{M} et \vec{B} est unique et linéaire. Pour la valeur H_2 il y a deux solutions possibles au système, dans la région entre H_2 et H_4 il existe même trois solutions possibles au système. En particulier pour la valeur H_3 une des solutions possibles est $\vec{M} = 0$ et $\vec{B} = 0$. Pour les valeurs comprises entre H_4 et H_5 et inférieures, c'est-à-dire pour les champs négatifs, le comportement des solutions est symétrique à l'origine.

Voyons comment ce comportement peut être interprété.

La première considération est qu'à partir d'une certaine valeur du champ magnétique, on observe un phénomène de saturation. Pour des valeurs égales à H_1 ou H_5 , la magnétisation ne varie pratiquement plus et cela indépendamment du champ appliqué, qu'il soit positif ou négatif. Pour toute valeur de H comprise entre H_1 et H_5 , il existe plusieurs valeurs possibles – toutes valables – pour M : la valeur qui représente l'état actuel du système dépend de l'histoire passée du matériau, comme nous le verrons ci-après. Pour la valeur H_3 , il existe trois solutions : une à $H = 0$ et deux symétriques à 0 de signe opposé. Lorsque le champ passe de H_3 à H_1 , ces solutions se rapprochent toutes de la valeur asymptotique H_1 , en particulier à la valeur H_2 la solution provenant de $H = 0$ se confond avec celle qui est la plus proche de la valeur asymptotique.

Si on fait un graphique $M - H$ l'évolution de ces solutions par rapport au champ magnétique externe H , on obtient un diagramme appelé *cycle d'hystérésis*.



Si nous partons de la situation où nous avons un matériau démagnétisé et aucun champ, alors notre solution est nécessairement celle indiquée par $\vec{M} = 0$ et $\vec{H} = 0$ pour H_3 . La courbe en pointillés est appelée *courbe de première magnétisation* et décrit le comportement du moment magnétique de la substance lorsqu'un champ magnétique lui est appliqué pour la première fois.

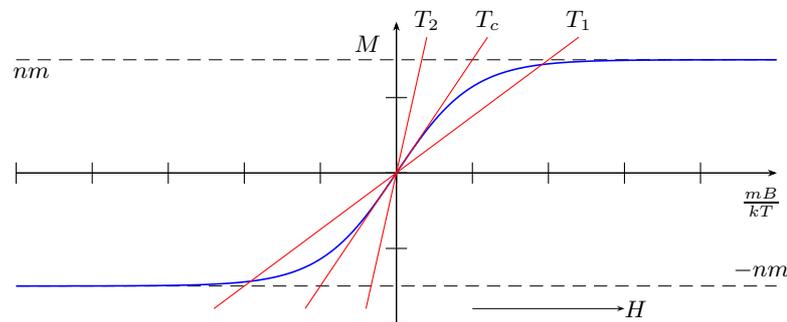
Une fois la saturation atteinte (une condition dans laquelle le moment magnétique total n'augmente pas, même si le champ magnétique externe augmente), si nous commençons à diminuer le champ, le système passe par la partie supérieure du graphique : vous pouvez remarquer qu'en ramenant le champ à zéro, le système conserve une certaine *aimantation résiduelle* (point a). Si à ce point du graphique un champ magnétique est appliqué dans l'autre direction (négative), la magnétisation du système peut être remise à zéro (point b). La valeur du champ nécessaire à cette opération est appelée *champ coercitif*. Si nous augmentons encore le champ dans le sens négatif, nous obtiendrons finalement une saturation négative.

Si ce champ est ensuite ramené à zéro, le système passe par la partie inférieure du graphique et conserve à nouveau une certaine magnétisation résiduelle, cette fois-ci négative (point *c*). Pour ramener la magnétisation à zéro, il faut appliquer à nouveau un champ coercitif, cette fois-ci positif (point *d*).

En augmentant à nouveau le champ, nous obtenons à nouveau une saturation positive, nous complétons ainsi le cycle.

Puisque l'énergie d'un dipôle magnétique immergé dans un champ est donnée par le produit scalaire du moment magnétique pour le champ $\vec{m} \cdot \vec{H}$, la surface sous-tendue par le cycle d'hystérésis correspond à l'énergie dissipée lors de l'exécution du cycle lui-même. Cette énergie est perdue par le champ magnétique et se retrouve en forme de chaleur : le matériau se réchauffe.

Étudions maintenant la solution du (6.10) à la variation de la température en maintenant tous les autres paramètres constants. Faire varier la température signifie faire varier la pente de la droite correspondant à la deuxième équation, dont la tendance qualitative pour trois températures $T_1 < T_c < T_2$ est indiquée dans la figure suivante.



Il est clair qu'au-delà d'une certaine température, indiquée par T_c et appelée *Température de Curie*, la solution est toujours unique quel que soit le champ appliqué. Le matériau n'est plus ferromagnétique et se comporte plutôt comme un matériau paramagnétique.

La température de Curie peut être calculée en remarquant que dans ce cas la pente de la droite est égale à la pente de la courbe de Langevin à l'origine, c'est-à-dire :²²

$$\frac{kT_c}{m\mu_0\gamma} = \frac{nm}{3} \quad \rightarrow \quad T_c = \frac{\mu_0 nm^2 \gamma}{3k}.$$

Les mesures expérimentales confirment qu'il s'agit d'une description correcte du comportement des matériaux ferromagnétiques.

QUELQUE APPLICATION

Nous avons mentionné que le cycle d'hystérésis génère de la chaleur dans le matériau ferromagnétique. Un autre problème peut survenir lorsque l'aimantation résiduelle n'est pas souhaitée. Par exemple, dans les dispositifs où des contacts magnétiques sont utilisés, la présence d'une aimantation résiduelle en absence de champ (généré dans ce cas par un courant) peut empêcher le déclenchement d'un contact.

Toutefois, il existe plusieurs cas où la présence d'hystérésis peut être mise à profit. Un cas typique est la construction d'aimants permanents. Dans ce cas, nous recherchons le cycle d'hystérésis le plus large possible car le point *a* est très proche de la saturation et une fois le champ magnétique désactivé, le matériau présente une forte magnétisation résiduelle.

Une utilisation beaucoup plus sophistiquée de la magnétisation résiduelle est pour construire des supports de mémoire. Dans ces cas, la magnétisation résiduelle, dans l'une des deux états (*a* ou *c*), est utilisée pour indiquer un bit 0 ou 1. De cette façon, les informations peuvent être stockées sur des disques durs, des bandes ou les anciennes mémoires RAM en ferrite.

22. En fait, une mesure expérimentale de la température de Curie permet de calculer la valeur de γ .

Champs électriques et magnétiques variables

7.1 Induction électromagnétique. Loi de Faraday-Neumman

Comme nous l'avons vu, en 1820 fut découverte la connexion existante entre le champ électrique et le champ magnétique, jusqu'alors considéré comme indépendants. En particulier, on observa qu'un courant dans un conducteur produit un champ magnétique et qu'un conducteur parcouru de courant immergé dans un champ magnétique est affecté par une force.

Sur la base de ces observations, il parut logique de penser que les aimants – en retour – devaient en quelque sorte générer aussi des champs électriques. Dans certaines expériences on essaya de mettre deux fils côte à côte, dont l'un parcouru de courant, en pensant que cela aurait suffi pour trouver un courant "induit" dans l'autre fil, mais ce type d'expérience donna toujours des résultats nuls.

Grâce à un autre ensemble d'expériences, Michael Faraday en 1840 put comprendre le point fondamental qui manquait aux expériences précédentes. Nous décrirons ces expériences de manière simplifiée pour mettre en évidence la caractéristique commune à toutes celles-ci.

Considérons un circuit de test constitué essentiellement d'un fil. Faraday remarqua que le courant circulait dans le fil dans les cas suivants :

1. lorsque le passage de courant dans un circuit voisin se déclenche ou s'arrête, c'est-à-dire s'il y a une *changement de courant* dans le circuit voisin,
2. il est proche d'un circuit parcouru de courant continu, mais celui-ci *se déplace* avec la vitesse \vec{v} ,
3. il est proche d'un aimant permanent qui *se déplace* avec la vitesse \vec{v} ,
4. le circuit lui-même se trouve dans un champ d'induction magnétique et il se déforme d'une façon quelconque.

Basé sur la (5.5) et sur le fait que le flux de \vec{B} ne dépend que du bord de la surface,¹ nous pouvons en déduire que la valeur du flux dépend de trois facteurs :

- le bord, et donc la forme du circuit,
- la valeur du champ induction magnétique \vec{B} dans lequel le circuit est immergé ,
- la valeur du courant I qui parcourt un circuit proche, car de celui-ci dépend le champ \vec{B} généré et concaténé avec le deuxième circuit.

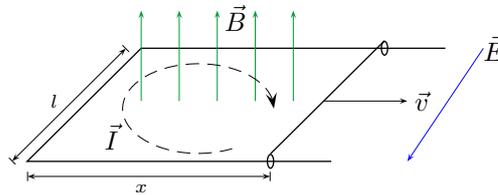
L'intuition brillante de Faraday fut de relier les expériences avec les notions exposées ci-dessus et d'en déduire qu'il ne suffit pas d'immerger un circuit dans un champ magnétique pour avoir des courants induits, mais que *des courants induits apparaissent à chaque fois que nous avons variation de*

1. Comme expliqué à la pag. 93

flux du champ \vec{B} concaténé avec le circuit. Cela nous permet d'expliquer les différents cas expérimentaux :

1. dans le premier cas, la variation de courant lors de l'ouverture et de la fermeture du circuit induit une variation du champ magnétique dans lequel le circuit de test est immergé,
2. dans le second cas, le fait de déplacer le circuit produit une variation du champ \vec{B} à l'endroit où se trouve notre circuit de test,
3. dans le troisième cas, déplacer l'aimant permanent implique à nouveau une variation du champ \vec{B} à l'endroit où se trouve notre circuit de test,
4. dans le quatrième cas, la déformation du circuit constitue une variation du bord concaténé au champ \vec{B} et par conséquent une variation du flux concaténé au circuit.

Considérons le quatrième cas dans une configuration particulièrement simple, c'est-à-dire trois côtes rigides et un côté coulissant qui ferme le circuit électrique.



Sur la base de la relation $q\vec{v} \times \vec{B}$, nous voyons immédiatement que la force de Lorentz agit sur les particules chargées dans la direction de la longueur l de la portion du fil se déplaçant à la vitesse $q\vec{v}$. Les électrons se déplacent alors vers le haut de la barre mobile, ce qui provoque un manque d'électrons de l'autre côté. Une différence de potentiel électrique est alors générée et la tige mobile est soumise à un champ électrique croissant \vec{E} , car celui-ci dépend directement des charges impliquées. Ce champ électrique tend à s'opposer au mouvement des charges dû à la force de Lorentz, et dans des conditions "ouvertes", ce champ électrique est capable d'annuler le mouvement des charges. Si les deux extrémités de la tige coulissante sont connectées en un circuit comme indiqué en figure, alors les électrons pourront se déplacer le long du fil et atteindre l'extrémité opposée. La force de Lorentz ne sera plus contrecarrée par le champ électrique et un courant "induit" I est établi. Puisque la tige est traversée par un courant électrique et qu'elle est immergée dans un champ magnétique, elle est affectée par une force, appelée force de Faraday, conformément à la deuxième loi de Laplace. Cette force est dirigée dans la direction opposée à la vitesse \vec{v} et tend donc à ralentir le mouvement de la tige. Pour maintenir le mouvement il est donc nécessaire d'appliquer une force qui doit être opposée à la force de Faraday et qui effectue un travail donné par $L = Fv\Delta t$ et puisque pour la (5.1) $F = BI$ il s'ensuit que le travail s'écrit $L = BIv\Delta t$.

Le principe de conservation de l'énergie nous permet de conclure que c'est ce travail-ci fourni au système qui est finalement transformé en énergie électrique, de sorte que nous pouvons l'égaliser au travail effectué par le champ électrique induit :

$$BIv\Delta t = IV_{\text{ind.}}\delta t \quad \Rightarrow \quad V_{\text{ind.}} = Blv$$

Le potentiel induit dépend donc du champ électrique \vec{B} , de la longueur l et de la vitesse à laquelle elle se déplace \vec{v} .

L'observation intéressante provient du calcul du flux de champ \vec{B} . Dénotant avec S_i la surface couverte par le circuit à l'instant initial lorsque $x = x_i$ et S_f la surface couverte par le circuit à un instant générique lorsque $x = x_f$, alors les flux initial et final sont respectivement :

$$\Phi_B(S_i) = BS_i = Blx_i \quad \Phi_B(S_f) = BS_f = Blx_f$$

et sa variation s'écrit :

$$\Delta\Phi_B = Bl(x_f - x_i) = Blv\Delta t$$

car la différence $x_f - x_i$ est la distance parcourue par la tige $v\Delta t$. Par conséquent :

$$\Delta\Phi_B = Blv\Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = Blv$$

ceci est un résultat de grande importance, car il nous permet de conclure que :

$$V_{\text{ind.}} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

Si l'on considère que le champ induit n'apparaît que dans le segment mobile, on peut interpréter cette loi en disant que l'intégrale curviligne du champ induit étendue au circuit est égale à la variation du flux de \vec{B} . C'est exactement ce que nous avons prévu dans le §4.4 en écrivant le (4.10).

Si le circuit est immobile et que c'est le champ \vec{B} qui change, le raisonnement précédent ne peut évidemment pas être appliqué. C'est à Faraday qui revient le mérite d'avoir compris, sur base expérimentale uniquement, que cette règle du flux est tout à fait générale et valable quelle que soit la cause de la variation du flux. Faraday a donc pu écrire la relation qui porte le nom de *loi de Faraday-Neumann* :

$$\boxed{f_{\text{ind.}} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}} \quad (7.1)$$

où le signe moins prend en compte le fait que la force de Faraday s'oppose au mouvement (*Loi de Lenz*).

Considérons maintenant un cas plus général qui nous permettra d'introduire le concept de *flux coupé*. Considérons un circuit dont la ligne l délimite une surface Σ et soit dl l'élément du circuit. Ce circuit se déplace à une vitesse de \vec{v} dans un champ magnétique de \vec{B} . Considérons deux instants successifs t_i et $t_f = t_i + dt$. Dans cet intervalle de temps, l'élément dl se sera déplacé de $\vec{ds} = \vec{v}dt$ balayant une surface de $d\vec{S} = \vec{dl} \times \vec{ds} = \vec{dl} \times \vec{v}dt$.

Comme le circuit s'est déplacé entre-temps, le flux concaténé a varié de Φ_i à Φ_f . La surface Σ_i délimitée par le circuit à l'instant initial t_i , la surface délimitée à l'instant final Σ_f et la surface $d\Sigma$ balayée dans le mouvement pendant dt forment une surface fermée, par conséquent le débit total à travers cette surface doit être nul :

$$-\Phi_i + \Phi_f + \Phi_{d\Sigma} = 0$$

où le signe moins devant Φ_i prend en compte le fait que Φ_i est un flux entrant.

Il s'ensuit immédiatement que la variation du flux concaténé avec le circuit est donnée par $\Phi_{d\Sigma}$, qui prend le nom de *flux coupé*. Cette relation nous dit alors que si le champ d'induction magnétique \vec{B} est constant, alors la variation du flux concaténé coïncide avec le flux coupé.

Plus en général, le flux coupé s'écrit :

$$d\Phi = -d\Phi_{d\Sigma} = -\int_{d\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\oint_l \vec{B} \cdot (\vec{dl} \times \vec{v}dt) = -dt \oint_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

d'où :

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \oint_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \quad (7.2)$$

Si le circuit est en mouvement dans un champ d'induction constant \vec{B} , sur les charges internes agit alors un champ électromoteur induit donné par $\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$. L'interprétation de ce champ vient du fait que, simplement, une force de Lorentz agit sur les charges dans le circuit en mouvement. Rappelons que la force de Lorentz n'effectue pas de travail ; l'énergie dissipée dans le circuit en mouvement doit donc être fournie par la force externe qui maintient le circuit en mouvement à la vitesse \vec{v} .

7.2 L'importance de la loi de Neumann-Faraday

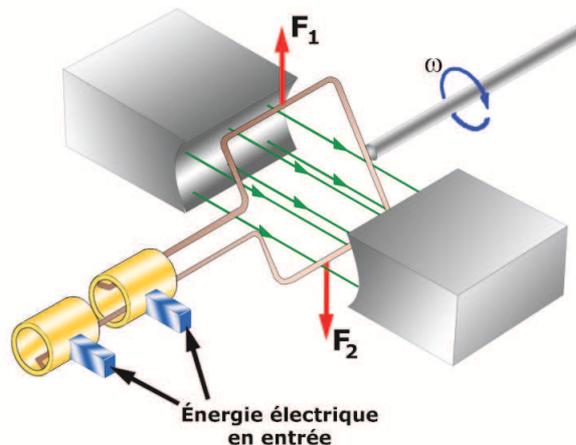
Lorsque Faraday rendit publique sa découverte qu'une variation de flux de champ d'induction magnétique génère une force électromotrice dans un conducteur, il semble qu'on lui ait demandé : "Mais à quoi sert tout cela?" et que Faraday ait répondu : "À quoi sert un nouveau-né?".

Une fois de plus, Faraday réalisa qu'il avait fait une découverte importante. En fait, la loi que Faraday établit est probablement la loi qui a eu la plus grande influence sur le développement technologique à la base de la société actuelle. Voyons rapidement une série de conséquences et d'applications concrètes qui découlent de cette loi.

MOTEURS ÉLECTRIQUES

Nous avons vu qu'un conducteur parcouru par un courant et plongé dans un champ magnétique est soumis à des forces mécaniques. Or, dès que des forces mécaniques sont en jeu la première question que l'on se pose est de savoir s'il est possible de les exploiter afin de produire du travail.

Considérons un aimant permanent avec une fente, dans cet espace il y a donc un champ magnétique. Si nous plongeons une bobine rectangulaire traversée par un courant dans cet espace, alors le courant dans les deux bras circule en sens inverse et telle sera la force \vec{F}_1 et \vec{F}_2 . Ces deux forces génèrent alors un couple qui entraîne la rotation de la bobine et donne lieu à un moment de torsion. L'utilisation de plusieurs bobines regroupées permet d'obtenir un couple plus élevé.

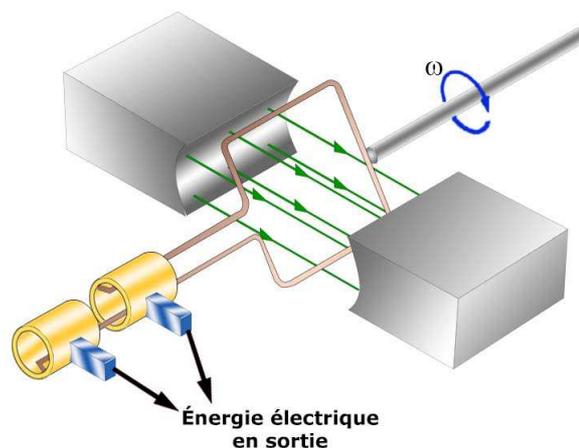


Si un axe est connecté à cette bobine, il pourra tourner à une vitesse ω . L'essieu peut alors être relié à un dispositif - par exemple une roue - et peut générer un travail mécanique.

C'est sur ce principe que reposent les moteurs électriques à courant continu.

GÉNÉRATEURS DE COURANT ALTERNATIF ET CONTINU. CENTRALES ÉLECTRIQUES

La génération de force électromotrice induite dépend de la variation du flux concaténé à la boucle. Si le principe ci-dessus est inversé, c'est-à-dire qu'une boucle est placée dans un champ magnétique et mise en rotation au moyen d'une force mécanique, un courant induit circule dans la boucle et peut être utilisé en aval du dispositif. C'est le principe à la base des générateurs de courant.



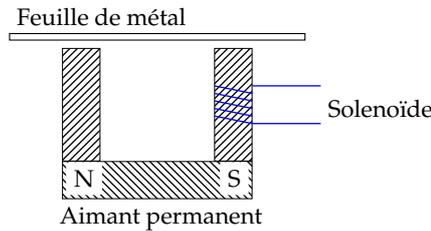
Ce principe peut être poussé beaucoup plus loin. La force mécanique utilisée pour faire bouger la bobine peut provenir de n'importe quelle source, en particulier elle peut être trouvée dans la nature. Avec des dispositifs appropriés, un essieu peut être mis en rotation par de l'eau en chute libre, par le vent, par la vapeur sous pression générée par le chauffage de l'eau. Lorsqu'un de ces systèmes est mis en pratique, nous pouvons puiser de l'énergie dans la nature :

- La chute libre de l'eau peut mettre en rotation des pales reliées à des enroulements électriques. La chute de l'eau peut être provoquée en faisant tomber l'eau dans des tuyaux appropriés (*conduites forcées*) et, afin d'avoir de l'eau disponible en permanence pour la chute, nous pouvons construire de grands réservoirs (*barrages*). La rotation des pales permet de créer une force électromotrice : nous avons une *centrale hydroélectrique*.
- La force du vent peut faire tourner une sorte de moulin à vent (*pales*), relié à des enroulements électriques. Dans ce cas, nous avons une *éolienne*.
- De la vapeur sous pression peut être envoyée vers des pales particulières (*turbines*) qui, toujours reliées à des enroulements électriques, produisent une force électromotrice. Selon la façon dont cette vapeur est générée, nous pouvons avoir des *centrales géothermiques* (la vapeur provient du sous-sol), des *centrales solaires thermodynamiques* (la vapeur est produite faisant chauffer l'eau par le soleil), des *centrales nucléaires* (la chaleur nécessaire pour produire la vapeur provient de la désintégration radioactive), des *centrales thermiques* (la chaleur provient de la combustion du charbon, du gaz, du méthane).

Une observation intéressante à faire est qu'il n'existe aucune application de la loi de Faraday-Neumann dans la nature : les applications que nous décrivons ici ne sont pas une simple imitation de ce que l'on peut voir dans la nature, mais un pur produit de l'intellect humain, qui a su exploiter une loi découverte par l'homme pour créer quelque chose d'inexistant dans la nature : la production d'énergie électrique.

MICROPHONES ET HAUT-PARLEURS

Considérons maintenant le dispositif illustré dans la figure suivante. Un aimant permanent en forme de U produit un champ magnétique dans les environs grâce à deux bras appelés "N" (pôle nord) et "S" (pôle sud). Sur l'un de ces bras se trouve un enroulement de manière à former un solénoïde avec un noyau en matériau ferromagnétique. Au-dessus des deux bras de l'aimant se trouve une feuille de métal en fer, immergée dans le champ produit par l'aimant. Comme nous l'avons vu dans §6.3, le champ est principalement concentré à l'intérieur de l'aimant et concaténé au solénoïde.



Supposons qu'une onde de pression (onde sonore) atteigne la feuille de fer. Cette onde fait vibrer la plaque et cela produit une variation du champ d'induction magnétique. Cette variation se retrouve dans le champ concaténé au solénoïde et selon la loi de Faraday-Neumann une force électromotrice induite apparaît, force qui génère un courant dans les bobines. Ce courant est donc lié à l'onde sonore qui a frappé la feuille : nous avons construit un microphone.

Cette opération peut être inversée. Si un courant variable circule dans le solénoïde, cela induit une variation du champ magnétique et la plaque métallique sera plus ou moins attirée par l'aimant. Ce mouvement produit des variations de pression dans le milieu environnant qui seront corrélées à la variation du courant dans le solénoïde. Nous avons construit un haut-parleur.

Nous pouvons aller plus loin et envisager de connecter deux appareils de ce type. L'onde sonore sur le premier produit une variation de courant qui est reportée sur le solénoïde du second dispositif qui pourra alors reproduire les variations à partir du courant. Nous avons construit un appareil qui permet de *transporter les sons à distance par moyen d'un câble électrique*. Si le nombre de tours du second solénoïde est plus important, le son peut même être amplifié, comme nous le verrons plus tard.

TRANSFORMATEURS ÉLECTRIQUES

Ce sujet sera suffisamment abordé plus tard, pour l'instant nous voulons simplement mettre en évidence l'idée de base. Supposons un aimant permanent et deux enroulements séparés sur ce même aimant. Si un courant variable circule dans le premier enroulement, il produit un champ d'induction magnétique qui est pratiquement confiné à l'intérieur de l'aimant. Il s'avère alors que le même champ circule également à l'intérieur du deuxième enroulement, en principe sans pertes.² Si le nombre de spires n'est pas le même, par exemple si le nombre de spires du deuxième enroulement est plus élevé, alors le flux concaténé avec le deuxième enroulement sera plus élevé et, par conséquent, la force électromotrice induite sera également plus élevée. Aux extrémités du deuxième enroulement nous aurons donc une tension *supérieure* à celle présente sur le premier enroulement.

Cela ouvre toute une série de possibilités dans la manipulation des courants et des tensions.

7.3 Forme locale : troisième et quatrième équation de Maxwell dans le cas non stationnaire

La forme locale de la troisième et quatrième équations de Maxwell dans le cas non stationnaire peut être dérivée par le même type de raisonnement que celui utilisé dans les autres cas.

Nous notons d'abord que, comme anticipé dans (4.10), la force électromotrice peut être écrite en termes de champ électromoteur sous la forme :

$$f_i = \oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

Où l'intégrale curviligne doit être calculée sur le circuit. Par conséquent, compte tenu de la défini-

² Il serait parfaitement sans pertes si le champ était *totalemment* contenu dans l'aimant, mais nous savons que cela n'est pas possible à la fois à cause des pertes présentes dans tout matériau réel et parce que les lignes de champ sont des lignes fermées qui se ferment à l'infini

7.3 - Forme locale : troisième et quatrième equation de Maxwell dans le cas non stationnaire 133

tion de flux :³

$$\oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left[\int_{S(t+dt)} \vec{B}(t+dt) \cdot d\vec{S} - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \right]$$

où $S(t)$ est la surface couverte par le circuit au temps t et $S(t+dt)$ est la surface couverte par le circuit au temps $t+dt$ et $\vec{B}(t)$ et $\vec{B}(t+dt)$ le champ d'induction magnétique aux deux positions différentes du circuit.

Puisque nous recherchons une relation locale, il est possible de développer $\vec{B}(t+dt)$ en série au premier ordre,⁴ obtenant :

$$\oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left[\int_{S(t+dt)} \left(\vec{B}(t) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt \right) \cdot d\vec{S} - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \right]$$

à savoir :

$$\oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left[\int_{S(t+dt)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \right] - \int_{S(t+dt)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

La contribution au champ électromoteur est composée de deux termes. Le premier, entre crochets, représente la variation du flux due au déplacement du circuit, le second terme est dû à la variation du vecteur \vec{B} .

La première contribution que nous avons vue coïncide avec le flux coupé et exprimée par le (7.2). En prenant la limite pour $dt \rightarrow 0$ du second terme⁵ nous trouvons :

$$\oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \oint_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} - \int_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \rightarrow \quad \oint_l (\vec{E}_i - \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \int_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Or, un observateur solidaire au système de référence voyant le circuit en mouvement va mesurer une force sur une charge de ce circuit donnée par $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, mais par définition de force électromotrice il doit aussi résulter $\vec{F} = q\vec{E}_i$. Par comparaison directe, il s'ensuit que $q\vec{E}_i = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, d'où $\vec{E} = \vec{E}_i - \vec{v} \times \vec{B}$. Il s'ensuit immédiatement que :

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

où \vec{E} est maintenant le champ électrique présent dans le système au repos.

En appliquant le théorème de Kelvin-Stokes à cette équation comme nous l'avons fait pour arriver à (1.9), nous avons :

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

et puisque elle doit être valide pour toute surface S :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (7.3)$$

qui est appelée *troisième équation de Maxwell dans le cas général (non stationnaire)*. Nous pouvons voir que dans ce cas, le champ électrique n'est plus irrotationnel (et donc conservatif) à cause d'un terme provenant du champ d'induction magnétique.

Quant à la quatrième équation de Maxwell (5.12), que nous écrivons ici pour simplicité :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

3. C'est ce que nous venons de trouver : la forme écrite est en fait équivalente au flux coupé.

4. $\vec{B}(t+dt) = \vec{B}(t) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt$

5. Cela parce que nous cherchons une relation *locale*, c'est-à-dire entre deux points infiniment proches.

il n'est pas possible d'introduire directement la dépendance temporelle dans cette équation. En réalité, comme nous l'avons vu à la fin du paragraphe §5.3 la forme de cette équation n'est valable que dans le cas stationnaire. Puisque la densité de courant \vec{J} apparaît dans cette équation, nous partons précisément de l'équation de continuité (4.6) et exprimerons la densité de charge via la première équation de Maxwell :⁶.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$$

et en inversant l'ordre de dérivation spatiale et temporelle :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

de cette façon, la dépendance temporelle de l'équation est automatiquement prise en compte par l'équation de continuité. Puisque c'est précisément à cause de l'équation de continuité que ce terme a une divergence identiquement nulle et qu'il se réduit au terme \vec{J} dans le cas stationnaire, Maxwell supposa que ce terme devait être la généralisation au cas non stationnaire de la densité de courant dans la quatrième équation de Maxwell, en d'autres termes que la quatrième équation de Maxwell dans le cas non stationnaire prend la forme :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)} \quad (7.4)$$

Le terme supplémentaire $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ prend le nom de *courant de déplacement*. Cette quantité exprime à un niveau général le fait que les champs électriques variant dans le temps génèrent des champs magnétiques.

Ce terme permet également de justifier l'apparent paradoxe du condensateur. Supposons que l'on dispose d'un condensateur chargé et que l'on court-circuite ses armatures afin de faire circuler le courant. Si l'on calcule la circulation du champ \vec{B} sur une trajectoire délimitant une surface incluant le conducteur, il sera égal à $\mu_0 I$, où I est le courant circulant dans le circuit. Mais si nous calculons le circuit le long du bord d'une surface à l'intérieur du condensateur, le résultat est 0 car aucun résultat de courant n'est concaténé. Mais ce résultat contredit le théorème du circuit et l'équation de continuité. L'intérêt de la résolution du paradoxe est de constater que nous n'avons pas pris en compte l'existence d'un champ électrique variable à l'intérieur du condensateur, champ qui contribue avec un terme donné par le courant de déplacement. Le flux du champ électrique à travers cette surface est donné par :

$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

et grâce au théorème de Gauss, nous pouvons écrire :

$$Q = \varepsilon_0 \Phi(\vec{E})$$

où Q est la charge qui génère le champ électrique. Le courant est alors donné par la dérivée temporelle de la charge Q :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial t} = \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

que c'est exactement le courant de déplacement. *Bien qu'il ne s'agisse pas de charges réelles, le champ électrique apporte un terme qui se comporte tel qu'un courant, d'où le nom de "courant de déplacement"*.

6. Cette étape est justifiée par le fait que la forme des première et deuxième équations de Maxwell ne change pas dans le cas non stationnaire, en particulier pour la première il s'avère suffisant d'inclure la dépendance temporelle dans la densité de charge $\vec{\nabla} = \rho(x, y, z, t)/\varepsilon_0$. Ceci est vérifié expérimentalement

7.4 Auto-induction. Coefficient de auto-inductance. Inductance Mutuelle

7.4.1 Auto-induction

Considérons un circuit générique traversé par un courant variable I . Le courant I produit un champ magnétique et, puisque le courant est variable, le champ d'induction magnétique concaténé avec le circuit est variable aussi. Par conséquent, selon la loi de Faraday-Neumann, il existe dans le circuit une force électromotrice induite par le courant lui-même, on parle donc d'auto-induction.

Si nous sommes dans des conditions stationnaires, le champ d'induction magnétique est exprimé par la loi de Biot et Savart (5.5) :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l I \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}$$

où le courant est constant sur tout le circuit : on peut donc le retirer du signe de l'intégrale car il ne dépend pas des coordonnées du circuit. En combinant cette observation avec le fait que le flux du champ d'induction magnétique à travers un élément de surface dS est donné par $d\Phi = d\vec{B}(t) \cdot d\vec{S}$, nous obtenons la relation :

$$d\Phi = d\vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = \underbrace{\left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{d\vec{l} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \cdot d\vec{S} \right]}_L I \equiv LI \quad (7.5)$$

où le terme L est le *coefficient d'auto-inductance* ou *inductance* du circuit et comme on peut le voir il ne dépend que de la géométrie du circuit.⁷

Le calcul de la valeur de l'inductance est immédiat dans le cas de géométries simples, en particulier pour un solénoïde. La valeur du champ d'induction magnétique à l'intérieur du solénoïde est donnée par la (5.8) $B = \mu_0 \frac{N}{L} I$. Le flux concaténé de \vec{B} avec chaque boucle est obtenu en multipliant la valeur de B par la surface,⁸ c'est-à-dire, en désignant par r le rayon du solénoïde :

$$\Phi(B) = \mu_0 \frac{N}{L} I S = \mu_0 \frac{N}{L} I N \pi r^2$$

d'où pour un solénoïde :

$$\boxed{L = \mu_0 \pi \frac{N^2}{L} r^2} \quad (7.6)$$

Bien sûr, dans le cas où le solénoïde n'est pas dans l'air, mais enroulé autour d'un matériau ferromagnétique ayant μ_r , la valeur de L en est multipliée : $L = \mu_0 \mu_r \pi \frac{N^2}{L} r^2$. À partir de la relation précédente, la loi de Faraday-Neumann (7.1) peut être facilement réécrite en sortant le courant :

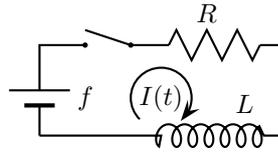
$$f_{\text{ind.}} = -\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

Cette façon d'écrire l'équation est importante car, sur la base de ce qui a été dit dans les paragraphes §4.5 et §4.4, nous pouvons conclure que la caractéristique d'une inductance est donnée par la relation $\Delta V = L \frac{dI}{dt}$ et cette forme peut être appliquée à la résolution des circuits de manière similaire à ce qui a été fait pour les condensateurs.

Pour voir ce qui se passe lorsque nous insérons une inductance dans un circuit électrique, considérons le circuit en figure :

7. Ainsi qu'éventuellement du matériau, qui intervient à travers de la perméabilité magnétique relative

8. Rappelons que le champ à l'intérieur du solénoïde est dirigé le long de l'axe, donc le produit scalaire $\vec{B} \cdot \vec{S}$ coïncide avec le produit BS . Afin d'avoir la concaténation totale avec le solénoïde, il faut considérer un terme BS pour chaque boucle, donc NBS .



Dans ce cas, dans l'équation que nous écrirons pour résoudre le circuit nous devons prendre en compte le terme de force électromotrice provenant de l'auto-induction. Nous écrirons donc :

$$f + f_a = RI \quad \rightarrow \quad f - L \frac{dI}{dt} = RI$$

où l'indice a désigne le terme provenant de l'auto-induction. L'équation à résoudre est alors :

$$f = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (7.7)$$

Cette équation peut être résolue de manière analogue à l'étude d'un circuit RC. Nous divisons les deux membres par R et séparons les variables :

$$f = RI + L \frac{dI}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{f}{R} = I + \frac{L}{R} \frac{dI}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{f}{R} \frac{dI}{I - f/R} = -\frac{R}{L} dt$$

nous pouvons ensuite intégrer membre par membre pour obtenir :

$$\ln(I - f/R) = -\frac{R}{L}t + \text{const.}$$

Dans l'exemple du circuit ci-dessus, en imposant que $I = 0$ à $t = 0$ (circuit ouvert), nous avons :

$$\text{const.} = \ln\left(-\frac{f}{R}\right)$$

d'où :

$$\ln(I - f/R) = -\frac{R}{L}t + \ln\left(-\frac{f}{R}\right)$$

et en prenant les exponentielles :

$$I - \frac{f}{R} = e^{[-(R/L)t + \ln(-f/R)]} \quad \rightarrow \quad I = \frac{f}{R} - \frac{f}{R} e^{-(R/L)t}$$

c'est-à-dire :

$$I(t) = \frac{f}{R} \left[1 - e^{-(R/L)t} \right]$$

Analysons le comportement du courant dans ce circuit.

A l'instant $t = 0$ le courant I est nul, comme il est naturel. Par la suite, en raison de la décroissance exponentielle lorsque t augmente, le courant augmente jusqu'à atteindre la valeur asymptotique de :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f}{R} \left[1 - e^{-(R/L)t} \right] = \frac{f}{R}$$

c'est-à-dire la valeur du courant comme s'il n'y avait que la résistance dans le circuit. En régime de courant continu, à l'état d'équilibre l'inductance se comporte comme un conducteur. La variation du courant dans le temps est dictée par la valeur de $\frac{R}{L}$, qui est la constante de temps d'un circuit RL. On constate que plus la valeur de l'inductance est grande, plus le circuit est lent à atteindre la valeur d'équilibre.

La force électromotrice induite aux extrémités de l'inductance L est donnée par $f_a = -LdI/dt$:

$$f_a = -f e^{-(R/L)t}$$

ce qui nous montre qu'au moment de la fermeture du circuit, elle a une valeur égale à la tension du générateur f et présente complètement aux extrémités de l'inducteur.

Supposons la situation inverse, c'est-à-dire le circuit en régime stationnaire avec un courant qui circule et ouvrons l'interrupteur. Si nous effectuons les calculs, nous voyons que la valeur de la constante dans ce cas vaut 1,⁹ et donc :

$$I(t) = \frac{f}{R} e^{-(R/L)t}$$

À l'ouverture du circuit, R devient immédiatement infini,¹⁰ tout comme le courant à cause la présence de l'inducteur. Bien sûr, le courant ne devient pas vraiment infini, mais il peut atteindre des valeurs très élevées pendant une fraction de seconde. Ce phénomène s'appelle *surtension*, les courants sont appelés *extra-courants de rupture* et sont la conséquence des charges inductives dans le circuit électrique. C'est la raison des étincelles qui peuvent se produire dans un interrupteur lorsque le courant est activé ou désactivé et qui peuvent, par exemple, provoquer une explosion si cela se produit dans un environnement saturé en gaz. Le phénomène des surtensions est également utilisé lorsqu'un courant fort est nécessaire dans un temps très court. C'est le cas des bobines dans les voitures (utilisées pour obtenir le courant nécessaire à l'allumage des bougies) ou des starters utilisés pour allumer les tubes néon.

Considérons la (7.7) et rappelons qu'à partir de la (4.10) et de la (4.9) l'énergie fournie par le générateur peut s'écrire $f dQ = f I dt$. Pour trouver l'équation du bilan énergétique, nous multiplions alors les deux membres par $I dt$:

$$f I dt = R I^2 dt + L I dI$$

Grâce à la (4.8) on reconnaît dans le premier terme au second membre la puissance dissipée dans la résistance par effet Joule. Par rapport à une simple charge résistive, le générateur doit donc fournir une énergie supplémentaire donnée par $dU_L = L I dI$. L'énergie que doit fournir le générateur pour que la valeur du courant dans l'inducteur passe de 0 à I est donnée par :

$$U_L = \int_0^I L I dI = \frac{1}{2} L I^2$$

qui est donc aussi le *énergie possédée par une inductance traversée par un courant I* . Où va concrètement l'énergie fournie par le générateur pour générer un courant à I dans le solénoïde? Pour répondre à cette question, reconsidérons le (7.7) avec la loi de Faraday-Neumann (7.1) et la définition de l'auto-inductance donnée ci-dessus :

$$f_{\text{ind.}} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

à savoir :

$$L \frac{dI}{dt} = \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{d}{dt} (N S B) = N S \frac{dB}{dt}$$

l'énergie nécessaire pour avoir un courant I dans l'inducteur s'obtient, comme nous l'avons vu, en multipliant par $I dt$:

$$U_L = N S \frac{dB}{dt} I dt = N \cdot S \cdot I \cdot dB$$

indiquant par $n = N/l$ le nombre de boucle par unité de longueur :

$$U_L = n \cdot l \cdot S \cdot I \cdot dB$$

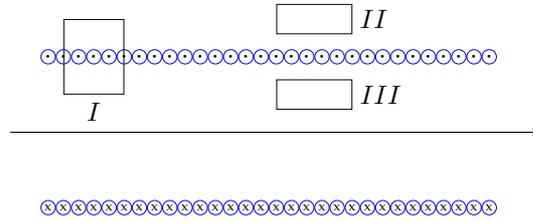
la densité d'énergie, c'est-à-dire l'énergie par unité de volume, est donc égale à :

$$\frac{U_L}{S \cdot l} \equiv \mathcal{U}_L = N \cdot I \cdot dB$$

9. À $t = 0$ doit être $I = f/R$, d'où $\ln(f/R - f/R) = \text{cost}$.

10. R représente la résistance totale du circuit. Si le courant circule dans le circuit, alors cette valeur est égale à R (plus éventuellement la contribution de la résistance des conducteurs et du générateur), mais si aucun courant ne circule, alors la résistance du circuit est infinie.

Nous allons maintenant montrer que le produit $N \cdot I$ est lié au champ magnétique présent à l'intérieur du solénoïde. Reprenons en considération le solénoïde en figure :



Dans §5.3 nous avons calculé le champ présent à l'intérieur du solénoïde et déduit que le champ à l'intérieur est dirigé le long de l'axe. Ce fait sera déduit ici sur la base de considérations plus générales.

À cause de la symétrie de la situation, les lignes de force ne peuvent être à leur tour que symétriques, en particulier il existe trois configurations possibles : 1) les lignes de force sont circulaires concentriques à la section du solénoïde ; 2) les lignes de force sont radiales à partir du centre du solénoïde ; 3) les lignes sont parallèles à l'axe du solénoïde.

Considérons les trois chemins indiqués dans la figure par I, II et III. Si le champ était radial, les contributions des deux lignes parallèles à l'axe seraient différentes, car le champ s'affaiblit au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre.¹¹ Mais alors l'intégrale de ligne calculée sur ces chemins serait différente de 0, puisqu'il n'y a pas de courants concaténés avec ces chemins cela contredirait la (5.11). Par conséquent, le champ serait nul dans tout l'espace. Si les lignes du champ étaient concentriques au solénoïde, le champ devrait également s'affaiblir à mesure que l'on s'éloigne du solénoïde, donc le même raisonnement du cas précédent s'applique. Au contraire, si le champ est aligné le long de l'axe, alors l'intégrale de ligne le long des chemins II et III est nulle et celle le long de I dépend du courant enchaîné :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}_I = \Sigma_i \Delta N I_i = N I$$

Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde vaut donc NI et la densité d'énergie :

$$\mathcal{U}_L = N \cdot I \cdot dB = H \cdot dB$$

Si $H = \mu B$, comme c'est le cas pour les matériaux non ferromagnétiques, alors la densité d'énergie peut être réécrite sous l'une des deux formes suivantes :

$$\mathcal{U}_L = H \cdot dB = \frac{1}{\mu} B dB = \mu H dH$$

ce qui nous permet d'obtenir par intégration l'énergie :

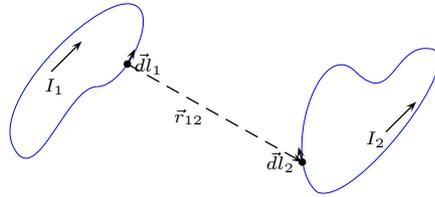
$$U_L = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad \text{o} \quad \frac{1}{2} \mu H^2$$

Il s'ensuit que l'énergie fournie par le générateur pour amener le courant dans l'inducteur à I est égale à $\frac{B^2}{\mu}$ (ou de manière équivalente $\frac{1}{2} \mu H^2$), c'est-à-dire la partie de l'énergie fournie par le générateur pour amener le courant à I est effectivement utilisée pour la création du champ magnétique. Cette énergie est rendue à nouveau disponible lorsque le champ magnétique est annulé (extra-courants de rupture), de sorte que le champ magnétique peut en quelque sorte être considéré comme un "dispositif" de conservation de l'énergie.

11. Si tel n'était pas le cas, le champ augmenterait ou serait constant à l'infini ce qui, nous le savons, n'est ni vrai ni possible.

7.4.2 Inductance Mutuelle

Considérons maintenant le cas de deux circuits traversés par un courant lentement variable. Cela nous permet d'avoir un champ magnétique pouvant être traité instant par instant comme un champ magnétique généré par un courant stationnaire et donc de simplifier le raisonnement que nous allons faire. Considérons la figure suivante.



Si le circuit 2 est parcouru par un courant I_2 , alors cela génère un champ d'induction magnétique \vec{B}_2 dans tout l'espace, en particulier il y a alors un champ concaténé avec le circuit 1 qui varie dans le temps. Il s'ensuit qu'il existe une force électromotrice induite dans le circuit 1 qui dépend du courant I_2 . De manière formelle :

$$f_{(1)} = -\frac{d}{dt} \int_{(1)} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{(1)} = -\frac{d}{dt} \int_{(1)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}_{(1)}$$

où l'intégrale est calculée sur la surface occupée par le circuit 1 et \vec{A} est le potentiel vecteur du champ \vec{B} . En vertu du théorème de Stokes, la relation précédente s'écrit :

$$f_{(1)} = -\frac{d}{dt} \oint_{(1)} \vec{A} \cdot d\vec{l}_{(1)}$$

Or, le potentiel vecteur est celui généré dans l'espace par le courant I_2 et qui peut être exprimé au moyen de la (5.16) :

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{(2)} \frac{I_2}{|r_{12}|} d\vec{l}_{(2)}$$

où l'intégrale est étendue au circuit 2. Par conséquent, la force électro-induite dans le circuit 1 due au champ \vec{B} du circuit 2 s'écrit :

$$f_{(1)} = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{d}{dt} \oint_{(1)} \left[\oint_{(2)} \frac{I_2}{|r_{12}|} d\vec{l}_{(2)} \right] \cdot d\vec{l}_{(1)}$$

En gardant à l'esprit que l'intégrale a lieu sur les coordonnées linéaires des circuits 1 et 2, le courant I_2 peut être retiré de l'intégrale en obtenant :

$$f_{(1)} = -\frac{\mu}{4\pi} \underbrace{\oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{d\vec{l}_{(2)} \cdot d\vec{l}_{(1)}}{|r_{12}|}}_{M_{12}} \frac{dI_2}{dt} \equiv M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

le terme M_{12} prend le nom de *coefficient d'inductance mutuelle*, comme on peut le voir il ne dépend que de la géométrie du circuit et il est symétrique dans l'échange des indices 1 et 2, par conséquent il est symétrique $M_{12} = M_{21}$, ce qui à première vue peut ne pas être évident puisque les deux circuits sont totalement arbitraires.

Supposons maintenant qu'à l'instant initial nous ayons un courant 0 dans les deux circuits et que nous allumons le courant I_1 dans le premier circuit. L'énergie fournie par le générateur est, comme on le voit, $\frac{1}{2}L_1I_1^2$. Nous allumons maintenant le courant I_2 dans le second circuit : maintenant le générateur 2 doit fournir l'énergie $\frac{1}{2}L_2I_2^2$ mais aussi l'énergie pour contrer la force électromotrice induite due au champ généré par le courant I_1 . Cette valeur est bientôt calculée :

$$f_{(2)} = M \frac{dI_1}{dt} \quad \rightarrow \quad U_M = \int M \frac{dI_1}{dt} dt = MI_1$$

il s'ensuit que l'énergie totale des deux circuits est donnée par :

$$U = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_2I_1 \quad (7.8)$$

Nous réécrivons maintenant cette dernière relation en réarrangeant les termes. Pour cela nous ajoutons et soustrayons le terme $\frac{1}{2}\frac{M^2}{L_1}I_2^2$:

$$U = \underbrace{\frac{1}{2}L_1I_1^2 + MI_2I_1 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{L_1}I_2^2}_{\left(I_1 + \frac{M}{L_1}I_2\right)^2} + \underbrace{\frac{1}{2}L_2I_2^2 - \frac{1}{2}\frac{M^2}{L_1}I_2^2}_{\frac{1}{2}\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right)I_2^2}$$

Le deuxième terme est immédiatement réécrit comme :

$$\frac{1}{2}\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right)I_2^2$$

Dans le premier terme, nous voulons faire apparaître un carré parfait à la place :

$$\frac{1}{2}L_1I_1^2 + MI_2I_1 + \frac{1}{2}\frac{M^2}{L_1}I_2^2 = \frac{1}{2}L_1 \underbrace{\left(I_1^2 + 2\frac{MI_1I_2}{L_1} + \frac{M^2}{L_1^2}I_2^2\right)}_{\left(I_1 + \frac{M}{L_1}I_2\right)^2}$$

L'énergie totale des deux circuits peut alors s'écrire sous la forme :

$$U = \frac{1}{2}L_1 \left(I_1 + \frac{M}{L_1}I_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right)I_2^2$$

Cette valeur doit toujours être positive pour toute valeur de I_1 et I_2 , en particulier pour la valeur $I_2 = -\frac{L_1}{M}I_1$. Mais pour cette valeur le premier terme s'annule, il doit donc en résulter :

$$L_2 - \frac{M^2}{L_1} > 0 \quad \Rightarrow \quad L_1L_2 > M^2 \quad \Rightarrow \quad |M| < \sqrt{L_1L_2}$$

qui est souvent écrite sous la forme :

$$M = k\sqrt{L_1L_2} \quad M \in [0, 1] \quad (7.9)$$

où k prend le nom de *coefficient de couplage*. S'il est proche de 1, le couplage est fort et cela signifie que la plupart des lignes de champ du premier circuit sont concaténées avec le second, si il est proche de 0, les deux circuits sont faiblement couplés et l'inductance mutuelle est négligeable.

Une dernière remarque sur la (7.8). Nous remarquerons que puisque la relation $M_{12} = M_{21}$ tient, alors celle-ci peut également être réécrite sous la forme :

$$U = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}M_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + \frac{1}{2}M_{21}I_1I_2$$

Si on désigne le terme d'auto-inductance par M_{11} et M_{22} ,¹² alors la généralisation à un système de N circuits est immédiate et résulte :

$$U = \sum_{i,j=1}^N M_{ij}I_iI_j \quad (7.10)$$

et M_{ij} s'appelle *matrice inductance*.

12. Ce qui n'est pas illogique, puisque c'est le champ généré par le circuit i -ème concaténé au circuit lui-même qui le génère.

7.4.3 Forces d'interaction magnétique

La forme (7.10) que nous venons de trouver pour l'énergie peut être réécrite sous une autre forme intéressante qui peut être plus facile à utiliser dans certains calculs pratiques. Commençons par le réécrire afin de mettre en évidence les termes différemment :

$$U = \sum_{i,j=1}^N I_i (M_{ij} I_j)$$

Les termes $M_{ii} I_i$ correspondent aux auto-inductances $L_i I_i$ des circuits i -èmes, tandis que les termes $M_{ij} I_j$ représentent le flux $\Phi_i(\vec{B}_j)$ concaténé avec le circuit i -ème du champ \vec{B}_j généré par le circuit j -ème. Il s'ensuit, en raison de l'additivité des champs d'induction magnétique, que le flux généré par le champ total $\vec{B}^{(\text{tot})} = \vec{B}_i + \sum_{j=1}^N \vec{B}_j$ concaténé avec le circuit i -ème est donné par $\Phi^{(\text{tot})} = \Phi_i + \sum_{j=1}^N \Phi_j$. Par conséquent, l'énergie d'interaction magnétique peut également être écrite sous la forme :

$$U = \sum_{i,j=1}^N \Phi_i(\vec{B}_j) I_i = \sum_{i=1}^N \Phi_i(\vec{B}^{(\text{tot})}) I_i$$

La méthode permettant de trouver la force agissant sur les circuits en raison de l'interaction avec les champs magnétiques est le même principe de travaux virtuels déjà illustré dans §2.2 et que nous répétons ici par commodité : *imaginez que nous déplaçons l'un des N circuits d'une quantité infinitésimale* (déplacement virtuel). *Pour ce faire, il faut appliquer une force externe \vec{F}^e (force virtuelle), qui va effectuer un certain travail* (travail virtuel). *Le travail requis correspond alors à la variation d'énergie du système.*

Si l'on considère un déplacement virtuel du circuit i -ème, la variation d'énergie est donnée uniquement par la variation de l'énergie magnétique due à la variation du flux.¹³ En effet, la puissance dissipée par l'éventuel effet Joule ne varie pas en déplaçant le circuit et les courants dans les circuits restent inchangés car la variation du flux concaténé avec le circuit i -ème est compensée par la variation de la puissance fournie par le générateur de force électromotrice, qui s'ajuste de manière à laisser justement les courants inchangés. En exprimant le travail en termes de force \times déplacement, la relation s'écrit donc :

$$-\vec{F}_i^e \cdot \vec{v}_i = \left. \frac{\partial U_M}{\partial t} \right|_{I=\text{const.}}$$

où le signe moins est justifié par le fait que si, par exemple, nous éloignons deux circuits l'un de l'autre, nous effectuons un travail positif (la force et le déplacement concordent), mais comme le flux concaténé diminue, l'énergie de l'interaction électromagnétique diminue. Par conséquent, les deux quantités ont un signe discordant. Mais la force exercée pour éloigner les circuits est égale et opposée à la force qu'ils ressentent à cause de l'interaction magnétique, indiquant ainsi par F cette force :

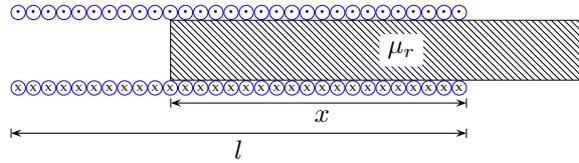
$$\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \left. \frac{\partial U_M}{\partial t} \right|_{I=\text{const.}}$$

d'où :

$$\vec{F}_i = \vec{\nabla} \cdot U_M \Big|_{I=\text{const.}}$$

Comme application de cette forme, nous calculons la force ressentie par une tige de matériau ferromagnétique lorsqu'elle est partiellement insérée dans un solénoïde parcouru par un courant.

13. Si l'on néglige la contribution de l'énergie cinétique, ce qui est tout à fait raisonnable puisque l'on suppose de petits déplacements *virtuels*.



Dans ce cas, le seul terme d'énergie magnétique présent est celui lié à l'auto-induction et donc nous avons selon l'équation (7.6) ($N/l \equiv n$, densité du nombre de spires) :

$$U_M = \frac{1}{2}LI^2 = \mu n^2 I^2 S l$$

où n est la densité de spires, S la surface du solénoïde et l la longueur.

Si le noyau ferromagnétique n'est présent que sur un tronçon x à l'intérieur du solénoïde, alors son inductance est donnée par :

$$L = \mu_0 \mu_r n^2 S x + \mu_0 n^2 S (l - x) = \mu_0 n^2 S [l + (\mu_r - 1)x]$$

et par conséquent :

$$U_M = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 S I^2 [l + (\mu_r - 1)x]$$

et la force subie par le noyau :

$$\vec{F}_x = \frac{\partial U_M}{\partial x} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 S I^2 (\mu_r - 1)$$

qui, étant $\mu_r > 1$, s'avère être positive et donc le noyau est attiré vers l'intérieur. Nous remarquons aussi que dans le cas d'un matériau diamagnétique, celui-ci serait légèrement repoussé par le solénoïde.

Pour avoir une idée des forces impliquées, considérons un solénoïde de surface 1 cm^2 (équivalent à 10^{-4} m^2), de longueur 10 cm composé d'un fil de 0.1 mm de diamètre et traversé par un courant de 1 A . Pour μ_r , nous pouvons raisonnablement prendre une valeur de 1000 . Le nombre de boucles dans 10 cm sera donc de 1000 , ce qui se traduit par une densité de 10000 boucle/m. Nous avons donc, en approximant le facteur $(\mu_r - 1)$ avec 1000 :

$$|\vec{F}| = \frac{1}{2} 4\pi \times 10^{-7} \frac{\Omega \cdot s}{m} \cdot 10^8 \text{ m}^{-2} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 1 \text{ A}^2 \cdot 10^3 = 2\pi \times (10^{-7} 10^8 10^{-4} 10^3) \frac{\Omega \cdot s}{m} \text{ m}^{-2} \text{ m}^2 \text{ A}^2 = 6.28 \text{ N}$$

Il est toujours bon de procéder à une vérification des dimensions après avoir effectué un calcul. Dans ce cas, rappelons que $[\Omega] = [V][A]^{-1}$, $[A] = [Q][s]^{-1}$, $[V] = [J][C]^{-1}$ et $[J] = [N][m]$:

$$\frac{[\Omega][s]}{[m]} \frac{1}{[m]^2} [m]^2 [A]^2 = \frac{[V][s]}{[A][m]} [A]^2 = \frac{[V][s]}{[m]} [A] = \frac{[J][s]}{[C][m]} \frac{[C]}{[s]} = \frac{[J]}{[m]} = \frac{[N][m]}{[m]} = [N]$$

La force de succion à l'intérieur du solénoïde est assez intense : 6.28 N , correspondant à environ 640 g de force de pesanteur. Nous voyons qu'elle est comparable au poids de la barre elle-même.

7.4.4 Transformateurs

Avant de s'aventurer dans une description plus détaillée des transformateurs, il est nécessaire de dire quelques mots sur la notation complexe des grandeurs électriques et sinusoïdales utilisées dans l'étude des circuits à courant non continu et sur l'analyse de Fourier. Cependant nous n'entrons pas dans les détails, laissant l'étude de ces sujets à des cours spécifiques d'analyse de circuits.

Courant sinusoïdal. Analyse de Fourier. Notation complexe des grandeurs sinusoïdales et électriques

Lors que l'on a compris que les courants induits sont générés par des variations du flux coupé, et que ces variations peuvent être induites simplement en faisant varier le courant circulant dans un circuit "de référence" (au sens d'un circuit générant le champ \vec{B} environnant), la question se pose de savoir comment créer un courant qui varie dans le temps. Heureusement, cela n'est pas particulièrement complexe, en fait cela vient presque naturellement comme nous allons le voir immédiatement.

Prenons l'exemple donné dans §7.2, et en particulier à la page 130. Si nous supposons que le champ magnétique dans lequel la boucle est immergée est uniforme,¹⁴ alors le flux coupé par le circuit dépendra de l'angle α que la spire forme avec la perpendiculaire au champ \vec{B} et ceci est intuitif : si la boucle est perpendiculaire au champ sa concaténation sera maximale, alors que lorsqu'elle est parallèle sa concaténation sera nulle. Le flux peut alors s'écrire :

$$\Phi(\vec{B}) = NSB \cos \alpha$$

où N est le nombre de boucles et S est la surface de la boucle.

Si la boucle tourne à vitesse constante ω , alors $\alpha = \omega t$ et par conséquent :

$$\Phi(\vec{B}) = NSB \cos \omega t$$

et la force induite dans la bobine est donnée par :

$$F(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = NSB\omega_0 \sin \omega t \equiv F_0 \sin \omega t$$

il s'ensuit que, de manière naturelle, le courant produit par un tel dispositif est sinusoïdal.

Lorsque nous étudions un circuit de courant non stationnaire, nous étudions généralement sa réponse à un courant (ou une tension) sinusoïdal. Ceci est possible sans perte de généralité car :

- Le théorème de Fourier nous assure que toute quantité périodique peut être exprimée sous la forme d'une série – éventuellement infinie – de fonctions sinusoïdales, à la seule condition qu'elle présente au plus un nombre fini de discontinuités finies dans un intervalle T ("période")¹⁵ et que dans les discontinuités possibles, elle est continue avec sa dérivée première
- Les systèmes d'équations différentielles décrivant les circuits électriques sont linéaires et donc la somme des solutions est toujours une solution.

Dans la théorie des circuits en courant alternatif, nous réécrivons les relations impliquant la fonction sinus en termes de cosinus en ajoutant un terme de phase si nécessaire :

$$I(t) = I_0 \sin \omega t \quad \rightarrow \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

et elle est utilisée par la suite pour associer à la grandeur obtenue en cosinus la grandeur complexe obtenue par addition d'une partie imaginaire :¹⁶

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad I(t) = I_0 [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$$

qui via la formule d'Euler¹⁷ peut être réécrit ainsi :

$$I_0 [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] = I_0 e^{j\omega t}$$

le module du nombre complexe ainsi défini représente l'amplitude de la grandeur alternée, ici $I(t)$. L'avantage d'utiliser cette notation est que lorsque l'on écrit les équations déjà connues pour

14. Ce qui est facilement obtenu avec une forme appropriée de l'aimant permanent.

15. Cela vous permet de rendre périodique n'importe quel morceau de fonction dans l'intervalle $[0, T]$, simplement en répétant conceptuellement le même morceau tous les T , à l'infini.

16. Dans la théorie des circuits, nous utilisons le symbole j pour l'unité imaginaire afin de ne pas la confondre avec le symbole i utilisé pour le courant.

17. Nous la rappelons ici :

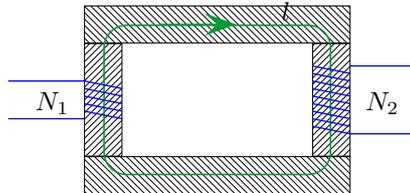
$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

d'où également :

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

le courant continu en courant alternatif, *les équations restent linéaires*, ce qui simplifie grandement leur résolution, car nous pouvons encore utiliser les différentes méthodes illustrées ci-dessus (par exemple le (7.7), le (4.13) ou même le (4.7)). Nous verrons rapidement son application au cas du transformateur que nous allons étudier dans cette section.

Considérons un anneau de matériau ferromagnétique sur lequel se trouvent deux enroulements composés de N_1 et N_2 boucles. :



Chacun d'eux peut être considéré comme un solénoïde avec un noyau ferromagnétique, dont la longueur correspond à l . Nous savons également, grâce à la §6.3, que les lignes de champ magnétique générées par un tel solénoïde sont confinées dans le matériau. Ainsi, pour le (7.6), les auto-inductances sont données respectivement par :

$$L_1 = \mu_0 \mu_r \frac{N_1^2 S}{l} \quad L_2 = \mu_0 \mu_r \frac{N_2^2 S}{l}$$

et le coefficient de couplage (7.9) :

$$M_{12} = M_{21} = M = k \sqrt{L_1 L_2} = k \frac{N_1 N_2 S}{l}$$

Nous ferons également l'hypothèse que $k = 1$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perte de flux (tout le flux généré par un solénoïde est concaténé avec l'autre) et que les directions des enroulements sont concordantes, ce qui explique le signe positif.

Pour étudier le comportement de cet objet (*transformateur statique*), nous construisons un circuit électrique avec cet élément. Imaginons alors une résistance R connectée à l'enroulement N_2 et une source $F(t)$ de force électromotrice, sinusoïdale comme mentionné dans l'encadré, appliquée à l'enroulement N_1 . Supposons que la résistance électrique des enroulements soit négligeable.

Notre objectif est maintenant d'écrire les équations décrivant ce système, équations qui seront basées sur le même principe que la (7.7). Cependant, comme nous sommes dans en condition de courant alternatif, nous devons également prendre en compte un terme provenant de l'induction magnétique due à l'autre circuit, terme qui est explicité par le coefficient de couplage. L'équation relative au premier enroulement est donc :

$$\underbrace{F(t)}_{\text{Force électromotrice sinusoïdale}} - \underbrace{L_1 \frac{dI_1}{dt}}_{\text{auto-induction circuit 1}} - \underbrace{M \frac{dI_2}{dt}}_{\text{Induction mutuelle du circuit 2}} = \underbrace{0}_{\text{Chute de tension dû aux résistances}}$$

Et pour le deuxième enroulement :

$$\underbrace{0}_{\text{Force électromotrice}} - \underbrace{L_2 \frac{dI_2}{dt}}_{\text{auto-induction circuit 2}} - \underbrace{M \frac{dI_1}{dt}}_{\text{Induction mutuelle du circuit 1}} = \underbrace{RI_2}_{\text{Chute de tension de } R}$$

Nous constatons que *il n'y a pas de composants ou de liaisons physiquement communs aux deux circuits contenant les deux inductances, l'influence de l'une sur l'autre étant contenue dans le terme de couplage dû à l'induction mutuelle.*

Ces deux équations doivent évidemment tenir simultanément, il faut donc les mettre en système :

$$\begin{cases} L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} = F(t) \\ RI_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} = 0 \end{cases}$$

Rappelons maintenant que nos quantités s'écrivent sous forme complexe : $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$, $I_i = I_i^0 e^{j\omega t}$, d'où :

$$\begin{cases} j\omega L_1 I_1^0 e^{j\omega t} + j\omega M I_2^0 e^{j\omega t} = F_0 e^{j\omega t} \\ RI_2^0 e^{j\omega t} + j\omega L_2 I_2^0 e^{j\omega t} + j\omega M I_1^0 e^{j\omega t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j\omega L_1 I_1^0 + j\omega M I_2^0 = F_0 \\ RI_2^0 + j\omega L_2 I_2^0 + j\omega M I_1^0 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire sous forme de matrice :

$$\begin{pmatrix} +j\omega L_1 & +j\omega M \\ j\omega M & (R + j\omega L_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1^0 \\ I_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce système peut être résolu par des techniques d'algèbre linéaire. Cependant, nous ne sommes pas intéressés ici à résoudre exactement ce système, nous voulons plutôt souligner l'aspect pratique qui rend intéressante l'application de l'induction mutuelle dans le cas des transformateurs. Pour simplifier les calculs, supposons que le deuxième solénoïde ne soit pas fermé sur une résistance et calculons le courant induit dans le deuxième solénoïde. Mathématiquement, cela signifie que l'on met le courant I_2 à zéro. Dans cette hypothèse, le terme d'induction mutuelle disparaît de la première équation, tandis que dans la deuxième équation, le terme lié à l'inductance L_2 disparaît :

$$\begin{cases} j\omega L_1 I_1^0 = F_0 \\ V_0 + j\omega M I_1^0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_0 = j\omega L_1 I_1^0 \\ V_0 = -j\omega M I_1^0 \end{cases}$$

ayant noté par V_0 la différence de potentiel induite aux extrémités du solénoïde 2 (circuit ouvert). En prenant le ratio membre à membre des deux :

$$\frac{V_0}{F_0} = -\frac{j\omega M I_1^0}{j\omega L_1 I_1^0} = -\frac{M}{L_1} = -\frac{N_1 N_2 S}{l} \frac{l}{N_1^2 S} = -\frac{N_2}{N_1} \quad V_0 = -\frac{N_2}{N_1} F_0$$

Nous voyons donc que la tension induite aux extrémités du deuxième solénoïde dépend du rapport du nombre de boucles et peut être beaucoup plus élevée que la force électromotrice appliquée au solénoïde 1. Les hautes tensions ainsi obtenues ont été utiles et exploitées pour construire des tubes à décharge, des tubes cathodiques et la production de rayons X. Actuellement les tensions élevées qui peuvent être obtenues sont encore utilisées, par exemple, dans les systèmes d'allumage des moteurs à combustion interne. Des procédures d'élévation et diminution de tension à travers de transformateurs sont matière courante dans la distribution électrique sur réseau.¹⁸

18. Pour des question de dissipation d'énergie, il est beaucoup plus rentables de transférer sur les longues distances le courant sous forme de haute tension, pour la réduire en proximité des centres d'utilisation (*transformateur de proximité*).

