

APPUNTI DI
FISICA TEORICA

autore: VALERIANO BARASSI
(docente: *Franco Buccella*)

Anno Accademico 1992-93

Quest'opera è soggetta alla Creative Commons Public License versione 4.0 o posteriore. L'enunciato integrale della Licenza in versione 4.0 è reperibile all'indirizzo internet:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.it>

- Si è liberi di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre, in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera alle seguenti condizioni:

Attribuzione. Bisogna attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da colui al quale è stata data quest'opera in licenza; in questo caso si tratta dell'autore,

Non commerciale. Non si può usare quest'opera per fini commerciali,

Non opere derivate. Non si può alterare o trasformare quest'opera, né usarla per crearne un'altra.

- Ogni volta che si usa o si distribuisce quest'opera, lo si deve fare secondo i termini di questa licenza, che va comunicata con chiarezza.
- In ogni caso si possono concordare con il titolare dei diritti d'autore (in questo caso l'autore) utilizzi di quest'opera non consentiti da questa licenza.

Quest'opera si avvale del diritto di citazione a scopo accademico e di critica previsto dall'Articolo 10 della Convenzione di Berna sul diritto d'autore.

“La natura è indifferente ai problemi che causa ai matematici”

- Jean Baptiste Joseph Fourier

Indice

NOTE	vii
CONVENZIONI TIPOGRAFICHE	ix
1 Il Momento Angolare e lo Spin	1
1.1 Richiami. Operatori Gradino	1
1.2 Composizione dei Momenti Angolari	3
1.3 Operatori Tensoriali Irriducibili	5
1.4 Teorema di Wigner-Eckart	6
1.5 Relazione fra i Tensori Irriducibili e le Armoniche Sferiche	9
1.5.1 Un caso pratico	12
1.6 Hamiltoniana di Accoppiamento $\vec{L} \cdot \vec{S}$	13
1.6.1 Hamiltoniane di Spin: un esercizio	15
2 Teoria delle Perturbazioni	21
2.1 Teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo	21
3 Diffusione alla Rutherford	25
3.1 Trattazione Classica	26
3.2 Trattazione Quantistica	28
4 L'Oscillatore Armonico	35
4.1 Oscillatore Armonico Unidimensionale	35
4.2 Oscillatore Armonico Tridimensionale	39
4.2.1 Oscillatore Tridimensionale: un esercizio	42
4.2.2 Oscillatore Tridimensionale: un altro esercizio	44
5 Formulazione Covariante dell'Elettromagnetismo	47
5.1 Richiami di Relatività Speciale	47
5.2 Formulazione Covariante delle Equazioni di Maxwell	48
5.3 Equazione di Klein-Gordon	54
5.4 Equazione di Dirac	56
6 Sistemi di Particelle Identiche	61
6.1 Formalismo di Seconda Quantizzazione per Bosoni	61
6.2 Formalismo di Seconda Quantizzazione per Fermioni	63
7 Elettrodinamica Quantistica	67
7.1 Quantizzazione del campo elettromagnetico	67
7.2 Quantizzazione del campo elettronico	69
7.2.1 Perturbazioni dipendenti dal tempo	70
7.2.2 Operatore di evoluzione temporale	71
7.2.3 Rappresentazione di Schrödinger, Heisenberg e Dirac	72
7.3 Quantizzazione dell'interazione fotone-elettrone	72
7.3.1 Interazione cariche-campo elettromagnetico al I ordine in e	73
7.4 Elettrodinamica Quantistica	75

7.4.1	Diffusione di due elettroni	75
7.4.2	Ampiezza di diffusione	77
7.4.3	Dipendenza dall'angolo di diffusione	81
7.4.4	Forma generale dell'ampiezza di diffusione	81
7.4.5	Sezione d'urto dell'effetto Compton	83
7.4.6	Diffusione positrone-elettrone	88
7.4.7	Regole di Feynmann per l'elettrodinamica quantistica	89

NOTE

Il presente scritto è costituito dagli appunti raccolti durante il corso di Fisica Teorica tenuto dal prof. FRANCO BUCCELLA nell'Anno Accademico 1992-93 presso la Facoltà di Fisica dell'Università di Napoli "Federico II".

Questo corso richiede una forte preparazione di base in meccanica quantistica e in matematica superiore ed una notevole capacità di astrazione. È incentrato su diversi aspetti superiori della meccanica quantistica, in particolare si studiano in maniera approfondita diversi aspetti dei momenti angolari (tensori irriducibili) e dell'oscillatore armonico tridimensionale, entrambi corredati da diverse applicazioni pratiche, della diffusione da un potenziale centrale, della formulazione covariante della meccanica quantistica e dell'elettromagnetismo. Per terminare, si tratterà l'elettrodinamica quantistica (QED) passando per la quantizzazione del campo elettromagnetico e del campo fermionico. Per quest'ultima parte devo ringraziare il Dr. Salvatore Esposito che mi ha messo a disposizione i suoi appunti presi a suo tempo al corso.

Queste note devono naturalmente essere considerate piuttosto come una traccia per lo studio che una trattazione esaustiva dell'argomento.

Questo lavoro è distribuito liberamente nella speranza che possa essere utile nella preparazione degli esami, con la sola condizione che si citi il nome dell'autore e la fonte.

CONVENZIONI TIPOGRAFICHE

Nella tabella seguente sono riportate le convenzioni tipografiche utilizzate nel testo. Si è cercato fin dove possibile di evitare ambiguità laddove tradizionalmente si utilizzano gli stessi simboli per diverse quantità fisiche (ad esempio la “phi” utilizzata sia per le funzioni d’onda che per il potenziale che per la variabile angolare).

<i>Simbolo utilizzato</i>	<i>Quantità fisica</i>
$\psi, \varphi, \Psi, \Phi$	Funzione d’onda
ϕ	Fattore di fase (funzioni d’onda)
θ, ϕ	Variabili Angolari
Ω	Angolo Solido
H	Hamiltoniana
E	Autovalore dell’Energia
E, ε	Energia
\mathcal{E}	Campo elettrico
\mathcal{H}	Campo magnetico
ϕ	Potenziale Elettrostatico
Φ, V	Potenziale generico
ρ	Densità
μ	Momento magnetico
\hat{O}	Operatore(*)
$\hat{\Psi}$	Operatore (eccezionalmente, per gli operatori di campo bosonico e fermionico)
\vec{v}	Vettore(**)
$\int_{\mathcal{O}}$	Integrale esteso ad una sfera
$\int_{\mathcal{V}}$	integrale esteso ad un volume

(*)Il simbolo di operatore $\hat{}$ è generalmente omissso per non appesantire inutilmente la notazione, è utilizzato per rimuovere ambiguità o quando essenziale ai fini della comprensione.

(**)Il simbolo $\vec{}$ è sempre utilizzato dove occorre.

Capitolo 1

Il Momento Angolare e lo Spin

1.1 Richiami. Operatori Gradino

Il principio di indeterminazione permette di ricavare:

$$[x, p_x] = i\hbar$$

dove il limite classico si ottiene per $\hbar \rightarrow 0$. Più in generale si verifica:

$$[r_h, p_k] = i\hbar\delta_{hk}$$

e ricordando che $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, si trova:

$$L_p = \epsilon_{pst} r_s p_t$$

da questa proprietà segue:

$$[L_p, L_q] = i\epsilon_{pqr} \hbar L_r$$

Questo significa che non si possono misurare contemporaneamente le tre componenti di \vec{L} . L'unico caso in cui questo è possibile è con $L_z = 0$, il che implica $L_x = L_y = 0$. Si verifica ancora:

$$[L^2, L_i] = 0$$

e quindi L^2 e L_i possono essere diagonalizzati contemporaneamente. Per ragioni storiche si sceglie generalmente $L_i = L_z$. Consideriamo ora lo stato:

$$L_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$$

e consideriamo gli operatori $L_x \pm iL_y$ (operatori *gradino*). Essi verificano:

$$L_z (L_x \pm iL_y) |l, m\rangle = \hbar(m \pm 1) (L_x \pm iL_y) |l, m\rangle$$

infatti:

$$[L_z, L_x + iL_y] = \hbar L_y + i\hbar L_x = \hbar (L_x + iL_y)$$

ed essendo un'uguaglianza fra operatori, essa deve valere per uno stato generico:

$$\begin{aligned} [L_z (L_x + iL_y) - (L_x + iL_y) L_z] |l, m\rangle &= \hbar (L_x + iL_y) |l, m\rangle \\ [L_z (L_x + iL_y) - (L_x + iL_y) m\hbar] |l, m\rangle &= \hbar (L_x + iL_y) |l, m\rangle \\ L_z [L_z (L_x + iL_y) |l, m\rangle] &= \hbar(m + 1) [L_z (L_x + iL_y) |l, m\rangle] \end{aligned}$$

e cioè applicando l'operatore $(L_x + iL_y)$ l'autovalore di L_z cambia di una unità \hbar , ma non cambia quelli di L^2 .⁽¹⁾ Questo discorso vale chiaramente finché $(L_x + iL_y)$ dà valori diversi da zero: esiste quindi un valore massimo m_{max} per cui vale:

$$(L_x + iL_y) |l, m_{max}\rangle = 0$$

¹Da qui il nome di operatori *gradino*.

ma questo implica che la norma debba essere uguale a zero:

$$\langle l, m_{max} | (L_x - iL_y) (L_x + iL_y) | l, m_{max} \rangle = 0$$

Aggiungendo e sottraendo poi L_z^2 :⁽²⁾

$$\langle l, m_{max} | (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 - L_z^2 - \hbar L_z) | l, m_{max} \rangle = 0 \quad (1.1)$$

Ora, $|l, m_{max}\rangle$ è autofunzione di L^2 :

$$L^2 |l, m_{max}\rangle = \hbar m_{max} (m_{max} + 1) |l, m_{max}\rangle$$

infatti la (1.1) si può riscrivere nella forma:

$$\langle l, m_{max} | L^2 - \hbar^2 m_{max}^2 - \hbar^2 m_{max} | l, m_{max} \rangle = 0$$

da cui si evince che deve risultare $L^2 \geq \hbar L_z + L_z^2$, perché la norma è definita positiva. Non è possibile pertanto avere un valore $m = m_{max} - 1/2$, in quanto l'operatore gradino applicato su questo stato darebbe $m = m_{max} + 1/2$, cioè una norma negativa. Deve allora essere:

$$m = m_{max} - n \quad n \in \mathbb{N}$$

In maniera del tutto analoga si trova m_{min} da $(L_x - iL_y)$: $m = m_{min} - n \quad n \in \mathbb{N}$. Ne consegue allora:

$$m_{max} - m_{min} = n \in \mathbb{N}$$

Ragioni di simmetria (cioè relative all'inversione di coordinate) forniscono ulteriormente $m_{max} = -m_{min}$. Ma allora risulta:

$$2m_{max} = n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad m_{max} \quad \text{è semintero}$$

dove semintero deve essere inteso in senso del tutto generale. Si tratta di una estensione della regola che voleva m intero, che derivava dalla richiesta di monodromia delle funzioni $e^{im\varphi}$ delle $Y_l^m(\theta, \varphi)$ autofunzioni di L^2 e L_z .

Si consideri ora l'uguaglianza:

$$(L_x + iL_y) |l, m\rangle = C_{lm} |l, m + 1\rangle$$

e ricerchiamo il coefficiente C_{lm} :

$$|C_{lm}|^2 = |\langle l, m | (L_x - iL_y) (L_x + iL_y) | l, m \rangle|$$

Chiamiamo ora $l = m_{max}$, l'autovalore di L^2 diventa allora:

$$L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l + 1) |l, m\rangle$$

Con calcoli analoghi si giunge alla

$$\langle l, m | (L_x - iL_y) = C_{lm} \langle l, m + 1 |$$

che moltiplicata per la precedente ci permette di ottenere:

$$\begin{aligned} |C_{lm}|^2 \langle l, m + 1 | l, m + 1 \rangle &= \langle l, m | (L_x - iL_y) (L_x + iL_y) | l, m \rangle \Rightarrow \\ |C_{lm}|^2 &= \langle l, m | (L_x - iL_y) (L_x + iL_y) | l, m \rangle \end{aligned}$$

Dalla equazione (1.1) sappiamo poi che:

$$\begin{aligned} \langle l, m | (L_x - iL_y) (L_x + iL_y) | l, m \rangle &= \\ &= \langle l, m | (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 - L_z^2 - \hbar L_z) | l, m \rangle = \\ &= \langle l, m | (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 - L_z^2 - \hbar L_z) | l, m \rangle = \\ &= [\hbar^2 l(l + 1) - \hbar^2 m(m + 1)] \langle l, m | l, m \rangle \end{aligned}$$

²Il termine $\hbar L_z$ deriva dal fatto che: $(L_x - iL_y) (L_x + iL_y) = L_x^2 + L_y^2 - iL_y L_x + iL_x L_y = L_x^2 + L_y^2 + i[L_x, L_y]$

Per cui risulta $|C_{lm}|^2 = \hbar^2 [l(l+1) - m(m+1)]$, ovvero:

$$C_{lm} = \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}$$

In modo analogo si trova per $(L_x - iL_y)$ che $C_{lm} = \hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)}$. Del tutto in generale quindi risulta:

$$(L_x \pm iL_y) |l, m\rangle = \hbar\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} |l, m \pm 1\rangle \quad (1.2)$$

1.2 Composizione dei Momenti Angolari. Coefficienti di Clebsch-Gordan

Consideriamo ora la somma di due momenti angolari. Nelle ipotesi:

$$\begin{aligned} [L_{1a}, L_{1b}] &= i\epsilon_{abc}\hbar L_{1c} \\ [L_{2a}, L_{2b}] &= i\epsilon_{abc}\hbar L_{2c} \\ [L_{1a}, L_{2b}] &= 0 \end{aligned}$$

allora $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ è ancora un momento angolare. Infatti, tenendo presente che le componenti miste danno 0 nel commutatore:

$$[L_a, L_b] = [L_{1a} + L_{1b}, L_{1b} + L_{2b}] = i\epsilon_{abc}\hbar(L_{1c} + L_{2c}) = i\epsilon_{abc}\hbar L_c$$

Si può dimostrare similmente che per la differenza vale:

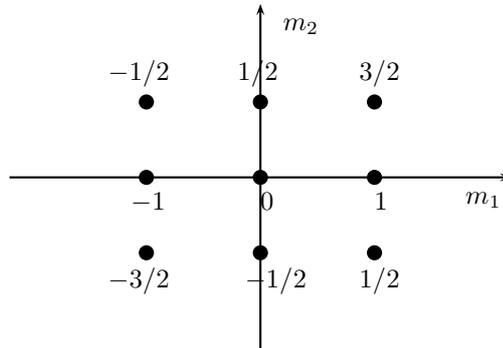
$$\vec{L} = \vec{L}_1 - \vec{L}_2 \quad [L_a, L_b] = i\epsilon_{abc}\hbar(L_{1c} + L_{2c})$$

e dunque la differenza di due momenti angolari *non* è un momento angolare.

Si considerino ora gli stati del momento angolare totale definiti dai prodotti tensoriali³ $|l_1, m_1\rangle \otimes |l_2, m_2\rangle$ e ricerchiamone le combinazioni che risultino contemporaneamente autostati di L^2 e di L_z . Ricordando che L_{1z} e L_{2z} agiscono solo nei rispettivi sottospazi:

$$(L_{1z} + L_{2z}) |l_1, m_1\rangle |l_2, m_2\rangle = i\hbar(m_1 + m_2) |l_1, m_1\rangle |l_2, m_2\rangle$$

Per L^2 il discorso risulta invece più complesso. Supponiamo come esempio che $l_1 = 1$ e $l_2 = 1/2$; in questo caso allora le combinazioni che possono presentarsi sono rappresentate nello schema seguente:



si consideri quindi lo stato $m = 3/2$: esso si può ottenere solo con $m_1 = 1$ e $m_2 = 1/2$, pertanto:

$$|l = \frac{3}{2}, m = \frac{3}{2}\rangle = |l_1 = 1, m_1 = 1\rangle |l_2 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2}\rangle$$

³Nel seguito per alleggerire la notazione spesso si ometterà di indicare esplicitamente il prodotto tensoriale quando sarà evidente dal contesto.

nel seguito per indicare più brevemente stati di questo tipo si utilizzerà la notazione $|3/2, 3/2\rangle = |1, 1\rangle|1/2, 1/2\rangle$. Tramite applicazione dell'operatore gradino $L_- = L_{1-} + L_{2-}$ si ricavano i seguenti vettori:

$$L_-|3/2, 3/2\rangle = (L_{1-} + L_{2-})|1, 1\rangle|1/2, 1/2\rangle$$

applicando la formula (1.2) al primo membro dell'equazione si ricava:

$$L_-|3/2, 3/2\rangle = \hbar\sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 1\right)}|3/2, 1/2\rangle \equiv \hbar\sqrt{3}|3/2, 1/2\rangle$$

mentre applicandola al secondo membro si ottiene:

$$(L_{1-} + L_{2-})|1, 1\rangle|1/2, 1/2\rangle = \hbar\sqrt{2}|1, 0\rangle|1/2, 1/2\rangle + \hbar|1, 1\rangle|1/2, -1/2\rangle$$

ricomponendo le due espressioni trovate nell'equazione di partenza:

$$\begin{aligned} \hbar\sqrt{3}|3/2, 1/2\rangle &= \hbar\sqrt{2}|1, 0\rangle|1/2, 1/2\rangle + \hbar|1, 1\rangle|1/2, -1/2\rangle \Rightarrow \\ |3/2, 1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1, 0\rangle|1/2, 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 1\rangle|1/2, -1/2\rangle \end{aligned}$$

In modo perfettamente analogo, cioè tramite l'applicazione iterata degli operatori gradino, è possibile ricavare tutti gli altri vettori. Si trova che nel caso generale vale la relazione:

$$|l, m\rangle = \sum_{\substack{l_1+l_2=l \\ m_1+m_2=m}} C_{m_1 m_2 m}^{l_1 l_2 l} |l_1, m_1\rangle |l_2, m_2\rangle$$

dove i $C_{m_1 m_2 m}^{l_1 l_2 l}$ sono i cosiddetti *coefficienti di Clebsch-Gordan*. Essi rappresentano una matrice ortogonale e sono dunque invertibili:

$$|l_1, m_1\rangle |l_2, m_2\rangle = \sum_{l, m} C_{m_1 m_2 m}^{l_1 l_2 l} |l, m\rangle$$

Questi coefficienti godono delle proprietà:

$$\begin{aligned} C_{m_1 m_2 m}^{l_1 l_2 l} &= (-1)^{l_1+l_2-l} C_{m_2 m_1 m}^{l_2 l_1 l} \\ C_{m_1 m_2 m}^{l_1 l_2 l} &= (-1)^{l_1+l_2-l} C_{-m_1 -m_2 -m}^{l_2 l_1 l} \end{aligned}$$

dall'ultima proprietà discende che se $m_1 = m_2 = 0$ e $(l_1 + l_2 - l)$ è dispari, allora risulta $C = 0$.

Introduciamo ora per comodità la notazione:

$$\begin{aligned} ||l, m\rangle & \text{ nella base } l_1, l_2, l, m \\ |m_1, m_2\rangle & \text{ nella base } l_1, l_2, m_1, m_2 \end{aligned}$$

e consideriamo il caso in cui $l_1 = 1, l_2 = 1$. Allora $m = 2$ può essere combinazione solo di $|1, 1\rangle$, $m = 1$ può essere combinazione solo di $|0, 1\rangle$ e $|1, 0\rangle$, infine $m = 0$ può essere combinazione solo di $|1, -1\rangle$, $|0, 0\rangle$ e $|-1, 1\rangle$. Considerando le proprietà di simmetria del sistema (ovvero: di simmetria dei coefficienti di Clebsch-Gordan) si ricava:

$$||2, \pm 2\rangle = |\pm 1, \pm 1\rangle$$

In modo analogo al precedente, sfruttando sia le proprietà dei coefficienti sia l'ortogonalità degli stati $m = 0$ con gli altri:

$$\begin{aligned} |2, \pm 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\pm 1, 0\rangle + |0, \pm 1\rangle) \\ |1, \pm 1\rangle &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (|\pm 1, 0\rangle - |0, \pm 1\rangle) \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, -1\rangle - |-1, 1\rangle) \\ |2, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|1, 1\rangle + |-1, 1\rangle + 2|0, 0\rangle) \\ |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|1, -1\rangle + |-1, 1\rangle - |0, 0\rangle) \end{aligned}$$

1.3 Operatori Tensoriali Irreducibili

Introduciamo ora il concetto di *operatore tensoriale irreducibile*. È noto che:

$$\begin{aligned} L_z |l, m\rangle &= \hbar m |l, m\rangle \\ L^2 |l, m\rangle &= \hbar l(l+1) |l, m\rangle \\ L_{\pm} |l, m\rangle &= \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} |l, m \pm 1\rangle \end{aligned}$$

Ora, l'insieme dei $2p + 1$ operatori tensoriali $T_q^{(p)}$, con $-p \leq q \leq p$, si dicono irreducibili se soddisfano le relazioni:

$$[L_z, T_q^{(p)}] = \hbar q T_q^{(p)} \quad (1.3a)$$

$$[L_{\pm}, T_q^{(p)}] = \hbar \sqrt{(p \mp q)(p \pm q + 1)} T_{q \pm 1}^{(p)} \quad (1.3b)$$

cioè in sostanza se q e p hanno i ruoli analoghi rispettivamente di m e di l . In pratica un operatore irreducibile soddisfa la relazione:

$$\begin{aligned} L_z T_q^{(p)} |0, 0\rangle &= \hbar q T_q^{(p)} |0, 0\rangle \\ L^2 T_q^{(p)} |0, 0\rangle &= \hbar p(p+1) T_q^{(p)} |0, 0\rangle \end{aligned} \quad (1.4)$$

in altri termini, si può dire che un operatore irreducibile $T_m^{(l)}$ trasforma $|0, 0\rangle$ in $|l, m\rangle$

L'esempio più semplice è costituito evidentemente dal momento angolare stesso, dove:

$$T_1^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (L_x + iL_y) \quad ; \quad T_0^{(1)} = L_z \quad ; \quad T_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (L_x - iL_y)$$

e più in generale, dati i tre operatori \hat{x}, \hat{y} e \hat{z} , la combinazione $-\frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}}$, \hat{z} , $\frac{\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}}$ costituiscono le componenti di un tensore $T_{1,0,-1}^{(1)}$ rispettivamente. Il calcolo del commutatore fornisce infatti:

$$\begin{aligned} \left[L_z, -\frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right] &= \left[\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x, -\frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right] = -\left(\frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} + \frac{i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) \hbar = \\ &= \hbar \left(-\frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) \\ \left[L_-, -\frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right] &= \left[l_x - iL_y, -\frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right] = \left[\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y - i\hat{z}\hat{p}_x - i\hat{x}\hat{p}_z, -\frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right] = \\ &= \hbar \left(\frac{\hat{z}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{z}}{\sqrt{2}} \right) = \hbar \sqrt{2} \hat{z} \end{aligned}$$

infatti $\sqrt{(l+m)(l+m+1)} = \sqrt{(1+1)(1)} = \sqrt{2}$. Si è tenuto conto nei passaggi di sopra del fatto che $\hat{y}\hat{p}_z$ e $\hat{x}\hat{p}_z$ non contribuiscono al valore del commutatore, in quanto questi termini commutano completamente con $(\hat{x} + i\hat{y})$.

Il termine $x^2 + y^2 + z^2$ (cioè r^2) fornisce anch'esso un tensore irriducibile $T_0^{(0)}$ e vale $[\vec{r}, L^2] = 0$, visto che L^2 agisce solo sulle variabili θ e φ . Le combinazioni $x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz$ forniscono un tensore $T_2^{(2)}$. In genere vale:

$$T_{m''}^{(l'')} = \sum_{\substack{l, l' \\ l+l'=l''}} C_{m' m''}^{l l'} T_m^{(l)} T_{m'}^{(l')}$$

dove i $C_{m' m''}^{l l'}$ sono esattamente i coefficienti di Clebsch-Gordan e l'' è legato dalla stessa relazione:

$$\begin{aligned} l'' &= l + l' \\ m'' &= m + m' \end{aligned}$$

1.4 Teorema di Wigner-Eckart

Diamo ora l'importante *Teorema di Wigner-Eckart*. Questo teorema è importante perché permette di semplificare il calcolo degli elementi di matrice nel caso di tensori irriducibili.

Sia a questo fine $T_q^{(p)}$ un insieme di tensori irriducibili e si consideri l'elemento di matrice:

$$\langle \tau', l', m' | T_q^{(p)} | \tau, l, m \rangle$$

dove τ rappresenta tutti i numeri quantici (altri che l e m) necessari a specificare lo stato del sistema. Esistono quindi $(2l'+1)(2p+1)(2l+1)$ elementi di matrice. Il Teorema di Wigner-Eckart stabilisce allora che vale la relazione:

$$\langle \tau', l', m' | T_q^{(p)} | \tau, l, m \rangle = C_{m' m}^{l p l'} f(\tau', l', T^{(p)}, \tau, l)$$

dove $f(\tau', l', T^{(p)}, \tau, l)$ è una funzione dipendente dai numeri quantici indicati, ma costante una volta fissati questi.

In altre parole, il teorema afferma che l'elemento di matrice di $T_q^{(p)}$ è dato dal coefficiente di Clebsch-Gordan di composizione dei momenti angolari l e p la cui terza componente è rispettivamente m e q moltiplicato per l'elemento di matrice ridotto non dipendente da m e m'

Dimostriamo ora questa affermazione.

Consideriamo preliminarmente $T_0^{(0)}$. In questo caso:

$$\langle \tau', l', m' | T_0^{(0)} | \tau, l, m \rangle = C_{m' m}^{l 0 l'} f(\tau', l', T^{(0)}, \tau, l)$$

e quindi la condizione affinché l'elemento di matrice sia diverso da zero è che risulti $l = l'$ e $m = m'$, ovvero:

$$\langle \tau', l', m' | T_0^{(0)} | \tau, l, m \rangle = \delta_{l l'} \delta_{m m'} f(\tau', l', T^{(0)}, \tau, l)$$

Dimostriamo questa relazione. Dalla definizione di tensore irriducibile (1.3a) si sa che vale la relazione:

$$\langle \tau', l', m' | [L_z, T_0^{(0)}] | \tau, l, m \rangle = 0 \cdot \langle \tau', l', m' | T_0^{(0)} | \tau, l, m \rangle \equiv 0$$

Allo stesso tempo vale $[L_z, T_0^{(0)}] = L_z T_0^{(0)} - T_0^{(0)} L_z$, che applicato esplicitamente fornisce:

$$\begin{aligned} \langle \tau', l', m' | L_z T_0^{(0)} - T_0^{(0)} L_z | \tau, l, m \rangle &= \\ &= \hbar m' \langle \tau', l', m' | T_0^{(0)} | \tau, l, m \rangle - \hbar m \langle \tau', l', m' | T_0^{(0)} | \tau, l, m \rangle = \\ &= \hbar(m' - m) \langle \tau', l', m' | T_0^{(0)} | \tau, l, m \rangle = 0 \end{aligned}$$

Il che fornisce $m' = m$ oppure $\langle \tau', l', m' | T_0^{(0)} | \tau, l, m \rangle = 0$.

L'analogo calcolo per l'operatore L^2 fornisce $l' = l$. Infatti, dalla (1.3b):

$$\langle \tau', l', m' | [L^2, T_0^{(0)}] | \tau, l, m \rangle = 0 \cdot \langle \tau', l', m' | T_0^{(0)} | \tau, l, m \rangle \equiv 0$$

ma ancora $[L^2, T_0^{(0)}] = L^2 T_0^{(0)} - T_0^{(0)} L^2$, per cui:

$$\begin{aligned} \langle \tau', l', m' | L^2 T_0^{(0)} - T_0^{(0)} L^2 | \tau, l, m \rangle &= \\ &= \hbar l'(l' + 1) \langle \tau', l', m' | T_0^{(0)} | \tau, l, m \rangle - \hbar l(l + 1) \langle \tau', l', m' | T_0^{(0)} | \tau, l, m \rangle = \\ &= \hbar [l'(l' + 1) - l(l + 1)] \langle \tau', l', m' | T_0^{(0)} | \tau, l, m \rangle = 0 \end{aligned}$$

il che implica $l'(l' + 1) = l(l + 1)$. Questa condizione può essere teoricamente soddisfatta in due modi:

$$l' = l \quad \text{o} \quad \begin{cases} l = l' + 1 \\ l' = l + 1 \end{cases}$$

che in pratica conducono entrambi a $l = l'$. Quindi, nel caso l'insieme di tensori irriducibili si riduca ad uno scalare (cioè quando $p = 0$), si ritrovano le note regole di selezione $l = l'$ e $m = m'$.

Consideriamo ora il caso generale.

Ancora la definizione (1.3a) di operatore tensoriale irriducibile permette di scrivere:

$$[L_z, T_m^{(l)}] = \hbar m T_m^{(l)}$$

si consideri allora l'elemento che deriva direttamente dalla definizione:

$$\langle \tau', l', m' | L_z T_q^{(p)} - T_q^{(p)} L_z | \tau, l, m \rangle = \hbar q \langle \tau', l', m' | T_q^{(p)} | \tau, l, m \rangle$$

ma valendo anche:

$$\langle \tau', l', m' | L_z T_q^{(p)} - T_q^{(p)} L_z | \tau, l, m \rangle = \hbar (m' - m) \langle \tau', l', m' | T_q^{(p)} | \tau, l, m \rangle$$

ne consegue:

$$\hbar (m' - m - q) \langle \tau', l', m' | T_q^{(p)} | \tau, l, m \rangle = 0$$

dalla quale segue che gli unici elementi di matrice non nulli sono quelli per cui risulta $m' = m + q$.⁽⁴⁾

Si noti ora che la combinazione lineare:

$$\sum_{\substack{l+p=l'' \\ m+q=m''}} C_{m q m''}^{l p l''} T_q^{(p)} | \tau, l, m \rangle \quad (1.5)$$

è autofunzione di L^2 e L_z con autovalori rispettivamente l'' e m'' . Infatti:

$$\begin{aligned} L_z \sum_{\substack{l+p=l'' \\ m+q=m''}} C_{m q m''}^{l p l''} T_q^{(p)} | \tau, l, m \rangle &= \sum_{\substack{l+p=l'' \\ m+q=m''}} C_{m q m''}^{l p l''} L_z T_q^{(p)} | \tau, l, m \rangle = \\ &= \sum_{\substack{l+p=l'' \\ m+q=m''}} C_{m q m''}^{l p l''} \left([L_z, T_q^{(p)}] + T_q^{(p)} L_z \right) | \tau, l, m \rangle = \\ &= \sum_{\substack{l+p=l'' \\ m+q=m''}} C_{m q m''}^{l p l''} \left(\hbar q T_q^{(p)} + T_q^{(p)} L_z \right) | \tau, l, m \rangle = \\ &= \sum_{\substack{l+p=l'' \\ m+q=m''}} C_{m q m''}^{l p l''} \hbar (q + m) T_q^{(p)} | \tau, l, m \rangle = \\ &= \hbar m'' \sum_{\substack{l+p=l'' \\ m+q=m''}} C_{m q m''}^{l p l''} T_q^{(p)} | \tau, l, m \rangle \end{aligned}$$

⁴Se si vuole, questo risultato è in un certo senso intuitivo. Infatti come notato, le (1.4) significano che l'operatore irriducibile $T_q^{(p)}$ applicato a $|0, 0\rangle$ "genera" $|p, q\rangle$, pertanto $T_q^{(p)} |l, m\rangle$ "genera" $|l + p, m + q\rangle$ e l'elemento di matrice per essere non nullo deve soddisfare $m' = m + q$.

La dimostrazione per L^2 è ben più complessa. A tal fine ricaviamo preliminarmente una relazione che sarà utile nel proseguo della dimostrazione. Si consideri la relazione:

$$\begin{aligned} L_+|\tau, l, m\rangle &= \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}|l, m+1\rangle = \\ &= \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)} \sum_{m_1+m_2=m} C_{m_1 m_2 m}^{l_1 l_2 l} |m_1, m_2\rangle \end{aligned}$$

e quest'altra:

$$\begin{aligned} (L_{1+} + L_{2+}) \sum_{m_1+m_2=m} C_{m_1 m_2 m}^{l_1 l_2 l} |m_1, m_2\rangle &= \\ &= \sum_{m_1+m_2=m} \hbar C_{m_1 m_2 m}^{l_1 l_2 l} \left(\sqrt{(l_1-m_1)(l_1+m_1+1)} |m_1+1, m_2\rangle + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(l_2-m_2)(l_2+m_2+1)} |m_1, m_2+1\rangle \right) \end{aligned}$$

Le due relazioni sono evidentemente equivalenti. Poiché, nella seconda relazione, m_1 è indice muto nella prima sommatoria a secondo membro e m_2 nella seconda, si può mandare nei due termini rispettivamente $m_1 \rightarrow m_1 - 1$ e $m_2 \rightarrow m_2 - 1$, ricavando:

$$\begin{aligned} \sum_{m_1+m_2=m} \hbar C_{m_1-1 m_2 m}^{l_1 l_2 l} \sqrt{(l_1-m_1+1)(l_1+m_1)} |m_1, m_2\rangle + \\ + \sum_{m_1+m_2=m} \hbar C_{m_1 m_2-1 m}^{l_1 l_2 l} \sqrt{(l_2-m_2+1)(l_2+m_2)} |m_1, m_2\rangle = \\ = \sum_{m_1+m_2=m} \hbar C_{m_1 m_2 m+1}^{l_1 l_2 l} \sqrt{(l-m)(l+m+1)} |m_1, m_2\rangle \end{aligned}$$

per cui uguagliando i coefficienti:

$$\begin{aligned} \sqrt{(l-m)(l+m+1)} C_{m_1 m_2 m+1}^{l_1 l_2 l} = \\ \sqrt{(l_1-m_1+1)(l_1+m_1)} C_{m_1-1 m_2 m}^{l_1 l_2 l} + \\ + \sqrt{(l_2-m_2+1)(l_2+m_2)} C_{m_1 m_2-1 m}^{l_1 l_2 l} \quad (1.6) \end{aligned}$$

Notando ora che l'operatore L_- agisce in maniera analoga sulla combinazione $\sum C_{m q m''}^{l p l''} T_q^{(p)} |\tau, l, m\rangle$ e che vale la relazione:

$$L^2 = L_z^2 + \frac{1}{2} (L_+ L_- - L_- L_+)$$

si trova:

$$\begin{aligned} L^2 \left(\sum_{\substack{l+p=l'' \\ m+q=m''}} C_{m q m''}^{l p l''} T_q^{(p)} |\tau, l, m\rangle \right) = \\ = \hbar^2 \left\{ m''^2 + \frac{1}{2} [l''(l''+1) - m''(m''+1) + l''(l''+1) + m''(m''+1)] \right\} \times \\ \times \sum_{\substack{l+p=l'' \\ m+q=m''}} C_{m q m''}^{l p l''} T_q^{(p)} |\tau, l, m\rangle \end{aligned}$$

cioè riducendo:

$$L^2 \left(\sum_{\substack{l+p=l'' \\ m+q=m''}} C_{m q m''}^{l p l''} T_q^{(p)} |\tau, l, m\rangle \right) = \hbar^2 l''(l''+1) \sum_{\substack{l+p=l'' \\ m+q=m''}} C_{m q m''}^{l p l''} T_q^{(p)} |\tau, l, m\rangle$$

dunque la (1.5) è effettivamente autostato di L^2 e L_z con autovalori l'' e m'' . Ma questo significa che la combinazione va in una combinazione lineare generica di $|\tau'', l'', m''\rangle$, cioè:

$$\sum_{\substack{l+p=l'' \\ m+q=m''}} C_{m'q m''}^{l p l''} T_q^{(p)} |\tau, l, m\rangle = g(T^{(p)}, \tau'', l, l'') |\tau'', l'', m''\rangle$$

Moltiplicando per $C_{m'q' m''}^{l p l''}$:

$$C_{m'q' m''}^{l p l''} \sum_{\substack{l+p=l'' \\ m+q=m''}} C_{m'q m''}^{l p l''} T_q^{(p)} |\tau, l, m\rangle = C_{m'q' m''}^{l p l''} g(T^{(p)}, \tau'', l, l'') |\tau'', l'', m''\rangle$$

e sommando su l'' e m'' e tenendo presente l'ortogonalità dei coefficienti,⁵ si ricava che restano solo i termini in $l = l'$ e $m = m'$:

$$T_q^{(p)} |\tau, l, m'\rangle = \sum_{l'', m''} g(T^{(p)}, \tau'', l'') |\tau'', l'', m''\rangle C_{m'q m''}^{l p l''}$$

che deve essere valida per q e m arbitrario:

$$T_q^{(p)} |\tau, l, m\rangle = \sum_{l''} g(T^{(p)}, \tau'', l'') |\tau'', l'', m''\rangle C_{m'q m''}^{l p l''}$$

se si moltiplica infine scalarmente per $\langle \tau', l', m' |$, questa fornisce una $\delta_{T' T''}$:

$$\langle \tau', l', m' | T_q^{(p)} |\tau, l, m\rangle = g(T^{(p)}, \tau', l', l) C_{m'q m'}^{l p l'}$$

che è esattamente la tesi del teorema di Wigner-Eckart.

1.5 Relazione fra i Tensori Irriducibili e le Armoniche Sferiche

Si cercherà ora una relazione fra tensori irriducibili e armoniche sferiche.

Le armoniche sferiche $Y_l^m(\theta, \phi)$ sono tali che:

$$\begin{aligned} L_z Y_l^m(\theta, \phi) &= \hbar m Y_l^m(\theta, \phi) \\ L^2 Y_l^m(\theta, \phi) &= \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \end{aligned}$$

La parte in ϕ è quella che presenta la dipendenza più semplice, essa soddisfa infatti:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} e^{im\phi} = m \hbar e^{im\phi}$$

valida sicuramente per spin interi.⁶ Le $Y_l^m(\theta, \phi)$ sono definite in generale da:

$$\begin{aligned} Y_l^0(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \\ Y_l^m(\theta, \phi) &= (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) (\sin \theta)^{|m|} e^{im\phi} \end{aligned}$$

⁵Ovvero che vale la:

$$\sum C_{m_1 m_2 m}^{l_1 l_2 l} C_{m'_1 m'_2 m'}^{l'_1 l'_2 l'} = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}$$

⁶Per richieste di monodromia delle funzioni.

da qui è possibile costruire un insieme di tensori irriducibili e si consideri a titolo di esempio $l = 0$ e $l = 1$. Per $l = 0$:

$$T_0^{(0)} = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = 1 = \sqrt{4\pi}Y_0^0(\theta, \phi)$$

mentre per $l = 1$ si è già visto (§1.3) che la combinazione $-\frac{\hat{x}+i\hat{y}}{\sqrt{2}}$, \hat{z} , $\frac{\hat{x}-i\hat{y}}{\sqrt{2}}$ costituisce esattamente un tensore irriducibile di rango 1. Esplicitando le componenti in coordinate polari ed utilizzando la formula di Eulero:⁷

$$x \pm iy = r \sin \theta \cos \phi \pm ir \sin \theta \sin \phi = r \sin \theta (\cos \phi \pm i \sin \phi) = r \cos \theta e^{\pm i\phi}$$

per cui:

$$\begin{aligned} T_0^{(1)} &= z = r \cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0(\theta, \phi) \\ T_1^{(1)} &= -\frac{\hat{x}+i\hat{y}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \theta e^{i\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}r\sqrt{2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^1(\theta, \phi) \\ T_{-1}^{(1)} &= \frac{\hat{x}-i\hat{y}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \theta e^{-i\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}r\sqrt{2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^{-1}(\theta, \phi) \end{aligned}$$

Se si definiscono ora le armoniche sferiche *rinormalizzate* come:

$$Y_l^m(\theta, \phi) \rightarrow \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_l^m(\theta, \phi)$$

si può generalizzare la relazione ottenuta nella forma:

$$\boxed{r^l Y_l^m(\theta, \phi) = T_m^{(l)}}$$

in maniera analoga risulta $p^l Y_l^m(\theta, \phi) = T_m^{(l)}$.

Si consideri a titolo di esempio una generica funzione di \vec{r} e p : $z^2 p_x p_y$. Notando che vale:⁸

$$r^2 P_2(\cos \theta) = r^2 \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{2}(3z^2 - x^2 - y^2 - z^2) = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2 - 2z^2)$$

si può scrivere:

$$z^2 = \frac{1}{3}(z^2 + x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2) = T_0^{(0)} + T_0^{(2)}$$

Per quanto riguarda il prodotto $p_x p_y$ si può procedere come segue. L'armonica sferica $Y_2^2(\theta, \phi)$ è data da:

$$Y_2^2(\theta, \phi) = 3\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \sin^2 \theta e^{i2\phi}$$

da cui:

$$p^2 Y_2^2(\theta, \phi) = (p \sin \theta e^{i\phi})^2 3\sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

e esprimendo $e^{i\phi}$ tramite le formule di Eulero $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$:

$$p^2 Y_2^2(\theta, \phi) = 3\sqrt{\frac{5}{4\pi}} (p_x + ip_y)^2$$

⁷Si ricordi che le formule di trasformazione da coordinate cartesiane a polari sono:

$$z = r \cos \theta \quad x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi$$

e la formula di Eulero è $\cos \phi \pm i \sin \phi = e^{\pm i\phi}$. Si noti inoltre che le armoniche sferiche $Y_1^{\pm 1,0}(\theta, \phi)$ sono:

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad Y_1^{\pm 1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

⁸Tenere presente che evidentemente $z = r \cos \theta$ e $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

in maniera analoga si trova:

$$p^2 Y_{-2}^2(\theta, \phi) \propto (p_x - ip_y)^2$$

In questo modo si può ricavare p_x e p_y per somma e sottrazione:

$$z^2 p_x p_y \propto (T_0^{(0)} + T_0^{(2)}) (\tilde{T}_2^{(2)} - \tilde{T}_{-2}^{(2)}) = \tilde{T}_2^{(2)} - \tilde{T}_{-2}^{(2)} + \text{altri termini}$$

dove gli “altri termini” sono:

$$\begin{aligned} T_0^{(2)} T_2^{(2)} &= C_{022}^{222} \tilde{T}_2^{(2)} + C_{022}^{223} \tilde{T}_2^{(3)} + C_{022}^{224} \tilde{T}_2^{(4)} \\ T_0^{(2)} T_{-2}^{(2)} &= -C_{022}^{22-2} \tilde{T}_{-2}^{(2)} - C_{02-2}^{223} \tilde{T}_{-2}^{(3)} + C_{0-2-2}^{224} \tilde{T}_{-2}^{(4)} \end{aligned}$$

la combinazione dei $T_2^{(2)}$ è a sua volta un tensore $\overset{*}{T}_2^{(2)}$ e analogamente $T_{-2}^{(2)}$ un tensore $\overset{*}{T}_{-2}^{(2)}$, per cui si ottiene in definitiva:

$$z^2 p_x p_y = \overset{*}{T}_2^{(2)} - \overset{*}{T}_{-2}^{(2)} + \overset{*}{T}_2^{(3)} - \overset{*}{T}_{-2}^{(3)} + \overset{*}{T}_2^{(4)} - \overset{*}{T}_{-2}^{(4)}$$

Nello spazio con $l = 1$ gli elementi di matrice $\langle l' = 1, m' | z^2 p_x p_y | l = 1, m \rangle$ possono essere scritti utilizzando il teorema di Wigner-Eckart, trovando:

$$\begin{array}{c} \langle \overset{\wedge}{1} | \\ \parallel \\ \langle \hat{m} | \\ \langle m = 1 | \\ \langle m = 0 | \\ \langle m = -1 | \end{array} \begin{array}{c} \overset{\wedge}{0} \\ \parallel \\ \langle \hat{m} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a^* & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

in quanto i tensori $T^{(2)}$ permettono variazioni solo di $\Delta m = 2$. Infatti, più in dettaglio risulta:

$$\begin{aligned} \langle m' | \overset{*}{T}_2^{(2)} - \overset{*}{T}_{-2}^{(2)} + \overset{*}{T}_2^{(3)} - \overset{*}{T}_{-2}^{(3)} + \overset{*}{T}_2^{(4)} - \overset{*}{T}_{-2}^{(4)} | m \rangle &= \text{per Wigner-Eckart} = \\ = (C_{m2m'}^{121} - C_{m-2m'}^{121}) f_2 + (C_{m2m'}^{131} - C_{m-2m'}^{131}) f_3 + (C_{m2m'}^{141} - C_{m-2m'}^{141}) f_4 \end{aligned}$$

Questa relazione è tale che se si scambiano m e m' questa cambia di segno: ne consegue che a deve essere immaginario puro. Da questa relazione si capisce inoltre che, grazie alle proprietà dei coefficienti di Clebsch-Gordan, sono nulli tutti i contributi per i quali vale la relazione $2 > m, m'$. Per fissare le idee e fare un esempio più concreto, si supponga lo spazio di $l = 1/2$ e $l = 3/2$. La matrice ha allora la forma generale:

$$\begin{array}{c} \langle \overset{\wedge}{3/2, 3/2} | \\ \langle \overset{\wedge}{3/2, 1/2} | \\ \langle \overset{\wedge}{3/2, -1/2} | \\ \langle \overset{\wedge}{3/2, -3/2} | \\ \langle \overset{\wedge}{1/2, 1/2} | \\ \langle \overset{\wedge}{1/2, -1/2} | \end{array} \begin{array}{c} \overset{\wedge}{3/2, 3/2} \\ \overset{\wedge}{3/2, 1/2} \\ \overset{\wedge}{3/2, -1/2} \\ \overset{\wedge}{3/2, -3/2} \\ \overset{\wedge}{1/2, 1/2} \\ \overset{\wedge}{1/2, -1/2} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & a & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & c & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c^* & 0 & 0 \\ c^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Grazie all'hermiticit  della matrice ci sono solo quattro elementi.

$$\begin{aligned}
 a &= \langle 3/2, 3/2 | T_2^{*(2)} + T_2^{*(3)} | 3/2, -1/2 \rangle = C_{-1/2 \ 2 \ 3/2}^{3/2 \ 2 \ 3/2} f(3/2, 2, 1/2) + C_{3/2 \ 2 \ 3/2}^{3/2 \ 2 \ 3/2} f(3/2, 3, 3/2) \\
 b &= \langle 3/2, 1/2 | T_2^{*(2)} + T_2^{*(3)} | 3/2, -3/2 \rangle = C_{-3/2 \ 2 \ -1/2}^{1/2 \ 2 \ -3/2} f(3/2, 2, 3/2) + C_{-3/2 \ 2 \ 1/2}^{3/2 \ 3 \ 3/2} f(3/2, 3, 3/2) \\
 \langle 3/2, -1/2 | -T_{-2}^{*(2)} + T_{-2}^{*(3)} | 3/2, 3/2 \rangle &= - \langle C_{3/2 \ 2 \ -1/2}^{3/2 \ 2 \ 3/2} f(3/2, 2, 3/2) + C_{1/2 \ -2 \ -3/2}^{3/2 \ 3 \ 3/2} f(3/2, 3, 3/2) \rangle \\
 \langle 3/2, -3/2 | -T_{-2}^{*(2)} + T_{-2}^{*(3)} | 3/2, 1/2 \rangle &= - \langle C_{1/2 \ -2 \ -3/2}^{3/2 \ 2 \ 3/2} f(3/2, 2, 3/2) + C_{1/2 \ -2 \ -3/2}^{3/2 \ 3 \ 3/2} f(3/2, 3, 3/2) \rangle
 \end{aligned}$$

grazie alle propriet  di simmetria dei coefficienti di Clebsch-Gordan:

$$C_{-1/2 \ 2 \ 3/2}^{\dots} = -C_{1/2 \ -2 \ -3/2}^{3/2 \ 2 \ 3/2}$$

si ricava che il I e III termine sono opposti, e similmente il II e il IV. Il rapporto dei termini a/b   un rapporto di coefficienti di Clebsch-Gordan:

$$\frac{a}{b} = \frac{C_{-1/2 \ 2 \ 3/2}^{3/2 \ 2 \ 3/2}}{C_{1/2 \ -2 \ -1/2}^{3/2 \ 2 \ 3/2}}$$

ma risulta:

$$C_{m_1 \ m_2 \ m_3}^{l_1 \ l_2 \ l_3} = (-1)^{l_2+m_2} C_{m_3 \ m_2 \ m_1}^{l_3 \ l_2 \ l_1}$$

per cui $a = b$ e dalla hermiticit  segue che a   immaginario puro.

Per gli altri coefficienti risulta:

$$\begin{aligned}
 \langle 3/2, 3/2 | T_2^{(2)} | 1/2, -1/2 \rangle &= C_{-1/2 \ 2 \ 3/2}^{1/2 \ 2 \ 3/2} f(3/2, 2, 3/2) = c \\
 \langle 3/2, 3/2 | T_{-2}^{(2)} | 1/2, -1/2 \rangle &= -C_{1/2 \ -2 \ -3/2}^{1/2 \ 2 \ 3/2} f(1/2, 2, 3/2)
 \end{aligned}$$

1.5.1 Un caso pratico

Si determinino le relazioni fra gli elementi di matrice dell'operatore xyz^2 fra stati di momento angolare $3/2$.

Consideriamo:

$$z = T_0^{(1)} \quad \mp \frac{x \pm iy}{\sqrt{2}} = T_{\pm 1}^{(1)}$$

da cui si ricava:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{-1}^{(1)} - T_1^{(1)}) \quad y = \frac{i}{\sqrt{2}} (T_{-1}^{(1)} + T_1^{(1)})$$

Ne consegue allora che:

$$xyz^2 = \frac{i}{2} (T_{-1}^{(1)} - T_1^{(1)}) (T_{-1}^{(1)} + T_1^{(1)}) T_0^{(1)} T_0^{(1)} = \frac{i}{2} (T_{-1}^{(1)} T_{-1}^{(1)} + T_1^{(1)} T_{-1}^{(1)} - T_1^{(1)} T_{-1}^{(1)} - T_1^{(1)} T_1^{(1)}) T_0^{(1)} T_0^{(1)}$$

ma $T_1^{(1)}$ e $T_{-1}^{(1)}$ commutano, quindi:

$$xyz^2 = \frac{i}{2} (T_2^{(2)} - T_2^{(2)}) T_0^{(1)} T_0^{(1)}$$

Il termine $T_0^{(1)} T_0^{(1)}$   dato da:

$$T_0^{(1)} T_0^{(1)} = C_{000}^{112} T_0^2 + C_{000}^{111} T_0^1 + C_{000}^{110} T_0^0$$

ma $C_{000}^{111} = 0$ per cui:

$$T_0^{(1)}T_0^{(1)} = C_{000}^{112}T_0^2 + C_{000}^{110}T_0^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}T_0^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}T_0^0$$

Occorre ora calcolare:

$$\begin{aligned} T_{-2}^2T_0^2 &= C_{-20-2}^{224}T_{-2}^4 + C_{-202}^{223}T_{-2}^3 + C_{-20-2}^{222}\tilde{T}_{-2}^2 \\ T_2^2T_0^2 &= C_{20-2}^{224}T_2^4 + C_{202}^{223}T_2^3 + C_{20-2}^{222}\tilde{T}_2^2 \\ T_{-2}^2T_0^0 &= C_{-20-2}^{202}\tilde{T}_{-2}^2 \\ T_2^2T_0^0 &= C_{202}^{202}\tilde{T}_2^2 \end{aligned}$$

In genere dati dei polinomi che commutano di grado n , daranno contributi solo i termini di ordine n , $n-2$, $n-4$ e si ricava:

$$xyz^2 = T_2^4 - T_{-2}^4 + T_2^2 - T_{-2}^2$$

Ora, T^4 non agisce sullo stato di spin 3/2:

$$\begin{array}{c} \langle 3/2 | \\ \langle 1/2 | \\ \langle -1/2 | \\ \langle -3/2 | \end{array} \begin{array}{c} | 3/2 \rangle \\ | 1/2 \rangle \\ | -1/2 \rangle \\ | -3/2 \rangle \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ciò segue dalla proprietà dei coefficienti di Clebsch-Gordan:

$$C_{m_1 m_2 m_3}^{l_1 l_2 l_3} = (-1)^{m_2} \sqrt{(2l_3 + 1)(2l_1 + 1)} C_{-m_3 m_2 -m_1}^{l_3 l_2 l_1}$$

1.6 Hamiltoniana di Accoppiamento $\vec{L} \cdot \vec{S}$

Si consideri ora una Hamiltoniana che presenti il momento angolare \vec{L} e lo spin \vec{S} accoppiati come $\vec{L} \cdot \vec{S}$.

L'interazione con un campo magnetico è descritta dal termine $-\vec{\mu} \cdot \vec{H}$ che nel caso dell'elettrone, nell'ipotesi che il campo magnetico \vec{H} sia diretto lungo z e che inoltre sia costante sulla dimensione del sistema in esame, è dato da:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2mc} (\vec{L} + 2\vec{S}) \quad \begin{array}{l} \text{campo lungo } z \\ \text{e costante} \end{array} \quad -\vec{\mu} \cdot \vec{H} = -\frac{e}{2mc} H (L_z + 2S_z)$$

La presenza di un accoppiamento $\vec{L} \cdot \vec{S}$ induce a scegliere la base $|J, J_z\rangle$ in cui risulta:

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} (J^2 - L^2 - S^2)$$

Questa Hamiltoniana nella base $|J, J_z\rangle$ non commuta con S_z . A prescindere da fattori numerici, gli elementi della diagonale sono dati da:

$$\langle L, S, J, J_z | L_z + 2S_z | L, S, J, J_z \rangle = \langle L, S, J, J_z | J_z + S_z | L, S, J, J_z \rangle$$

ed il teorema di Wigner-Eckart permette di dedurre che per gli elementi diagonali vale $S_z J^2 = (\vec{S} \cdot \vec{J}) J_z$, cioè intuitivamente:

$$S_z = \frac{(\vec{S} \cdot \vec{J}) J_z}{J^2}$$

In realtà:

$$S_z J^2 = (\vec{S} \cdot \vec{J}) J_z = S_z \left[J^2 + \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) \right] = \left[S_z J_z + \frac{1}{2} (S_+ J_- + S_- J_+) \right] J_z$$

e cioè

$$S_z J_+ J_- = S_+ J_- J_z$$

e lungo la diagonale:

$$\langle L, S, J, J_z | S_z J_+ J_- | L, S, J, J_z \rangle = \langle L, S, J, J_z | S_+ J_- J_z | L, S, J, J_z \rangle$$

che si può riscrivere come:

$$\begin{aligned} \sum_{n, n'} \langle L, S, J, J_z | S_z | n \rangle \langle n | J_+ | n' \rangle \langle n' | J_- | L, S, J, J_z \rangle &= \\ &= \sum_{n, n'} \langle L, S, J, J_z | S_+ | n \rangle \langle n | J_- | n' \rangle \langle n' | J_z | L, S, J, J_z \rangle \end{aligned}$$

Ora, l'azione di J_+ e J_- sugli stati è nota e, introducendo la notazione per alleggerire:

$$|L, S, J, J_{z-1}\rangle \equiv |J_{z-1}\rangle \quad ; \quad |L, S, J, J_{z+1}\rangle \equiv |J_{z+1}\rangle$$

l'uguaglianza di sopra può risciversi per il primo membro:

$$\begin{aligned} \sum_n \langle L, S, J, J_z | S_z | n \rangle \langle n | J_+ | J_{z-1} \rangle \langle J_{z-1} | J_- | L, S, J, J_z \rangle &= \\ &= \sum_n \langle L, S, J, J_z | S_z | J_{z+1} \rangle \langle J_{z+1} | J_+ | J_{z-1} \rangle \langle J_{z-1} | J_- | L, S, J, J_z \rangle \end{aligned}$$

mentre per il secondo si ottiene:

$$\sum_n \langle L, S, J, J_z | S_+ | J_{z-1} \rangle \langle J_{z-1} | J_- | L, S, J, J_z \rangle \langle L, S, J, J_z | J_z | L, S, J, J_z \rangle$$

Notiamo ora che l'elemento J_- è in comune ad entrambi e può pertanto eliminarsi:⁹

$$\begin{aligned} \sum_n \langle L, S, J, J_z | S_z | L, S, J, J_z \rangle \langle L, S, J, J_z | J_+ | J_{z-1} \rangle &= \\ &= \sum_n \langle L, S, J, J_z | S_+ | L, S, J, J_z \rangle \langle L, S, J, J_z | J_z | L, S, J, J_z \rangle \end{aligned}$$

Dal teorema di Wigner-Eckart si ricavano le relazioni:

$$\begin{aligned} J_+ &= -\sqrt{2} f_J C_{J_{z-1} 1 J_z}^{J 1 J} & J_z &= f_J C_{J_{z-1} 1 J_z}^{J 1 J} \\ S_+ &= -\sqrt{2} f_S C_{J_{z-1} 1 J_z}^{J 1 J} & S_z &= f_S C_{J_{z-1} 1 J_z}^{J 1 J} \end{aligned}$$

i due membri sono pertanto effettivamente uguali. Segue allora:

$$\langle L, S, J, J_z | S_z J^2 | L, S, J, J_z \rangle = \langle L, S, J, J_z | (\vec{S} \cdot \vec{J}) J_z | L, S, J, J_z \rangle$$

Ma:

$$\langle L, S, J, J_z | S_z J^2 | L, S, J, J_z \rangle = \hbar^2 j(j+1) \langle L, S, J, J_z | S_z | L, S, J, J_z \rangle$$

e poiché $\vec{J} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 + S^2 - L^2)$:

$$\langle L, S, J, J_z | (\vec{S} \cdot \vec{J}) J_z | L, S, J, J_z \rangle = \frac{\hbar^3}{2} j_z [j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)]$$

segue subito che:

$$\langle L, S, J, J_z | S_z | L, S, J, J_z \rangle = \hbar j_z \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

⁹In quanto può al massimo fornire $0 = 0$.

Ricordando ora la forma completa del termine di interazione:

$$\frac{e}{2mc}H(L_z + 2S_z) = \frac{e}{2mc}H(J_z + S_z)$$

e definendo il *fattore di Landé*:

$$g \equiv 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

il termine di interazione – nelle ipotesi fatte – può finalmente scriversi come:

$$\mu \cdot \vec{H} = \frac{e\hbar}{2mc}gJ_z$$

1.6.1 Hamiltoniane di Spin: un esercizio

Si consideri l'Hamiltoniana di spin:

$$H_0 = \frac{\omega}{\hbar}(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 - \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_4 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 - \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_4) \equiv \frac{\omega}{\hbar}(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \cdot (\vec{S}_3 - \vec{S}_4)$$

con $S_i^2 = 3/4\hbar^2$ e con le relazioni di commutazione:

$$[S_a^{(i)}, S_b^{(j)}] = \delta^{ij}i\hbar\epsilon_{abc}S_c^{(i)}$$

Si trovino autovalori ed autovettori nello spazio a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ dimensioni e si consideri successivamente la perturbazione:

$$H' = \epsilon\omega(S_{1z} - S_{2z} + S_{3z} + S_{4z})$$

La scelta della base opportuna è fatta cercando gli operatori che commutano con H_0 . In effetti, si trova subito lo spin totale \vec{S}^2 , S_z . Poiché inoltre la somma di momenti angolari è un momento angolare, allora $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ commuterà con H_0 . Si denoti con S_{12} il suo autovalore.

Si può pertanto scegliere come base $||S_{12}, S, S_z\rangle$, ottenendo i seguenti sottospazi:

$$\left. \begin{array}{l} a) ||1, 2, S_z\rangle \rightarrow 5 \text{ stati (degeneri)} \\ b) ||1, 1, S_z\rangle \rightarrow 3 \text{ stati (degeneri)} \\ c) ||1, 0, 0\rangle \rightarrow 1 \text{ stato} \\ d) ||0, 1, S_z\rangle \rightarrow 3 \text{ stati (degeneri)} \\ e) ||0, 0, S_z\rangle \rightarrow 1 \text{ stato} \end{array} \right\} 13 \text{ stati}$$

tale base non è completa in quanto non si ottengono tutti i 16 stati. Per individuare gli altri stati si deve in effetti specificare il valore dell'operatore $(\vec{S}_3 + \vec{S}_4)$ (con autovalore S_{34}), sebbene questo non commuti con H_0 . Nella base $||S_{12}, S_{34}, S, S_z\rangle$ si ha allora:

$$\left. \begin{array}{l} a) ||1, 1, 2, S_z\rangle \rightarrow 5 \text{ stati (degeneri)} \\ b_1) ||1, 1, 1, S_z\rangle \rightarrow 3 \text{ stati (degeneri)} \\ b_2) ||1, 0, 1, S_z\rangle \rightarrow 3 \text{ stati (degeneri)} \\ c) ||1, 1, 0, 0\rangle \rightarrow 1 \text{ stato} \\ d) ||0, 1, 1, S_z\rangle \rightarrow 3 \text{ stati (degeneri)} \\ e) ||0, 0, 0, 0\rangle \rightarrow 1 \text{ stato} \end{array} \right\} 16 \text{ stati}$$

Si consideri l'azione dell'operatore $(\vec{S}_3 - \vec{S}_4)$ sugli stati $||S_{3z}, S_{4z}\rangle$. L'operatore $(\vec{S}_3 - \vec{S}_4)$ è antisimmetrico nello scambio di 3 e 4 e quindi altera la simmetria degli stati di S_{3z} e S_{4z} . In particolare $(\vec{S}_3 - \vec{S}_4)$ rende antisimmetrico lo stato $||S_{3z}, S_{4z}\rangle + ||S_{4z}, S_{3z}\rangle$ e rende simmetrico lo stato $||S_{3z}, S_{4z}\rangle - ||S_{4z}, S_{3z}\rangle$.

Lo stato simmetrico risulta quello con $S_{34} = 1$, mentre quello antisimmetrico è dato da $S_{34} = 0$. Infatti, ad esempio, dalla regole di somma di due momenti angolari si trova:

$$\begin{aligned} ||S_{34} = 1, S_{34z} = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|S_{3z} = 1/2, S_{4z} = -1/2\rangle + |S_{3z} = -1/2, S_{4z} = 1/2\rangle) \\ ||S_{34} = 1, S_{34z} = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|S_{3z} = 1/2, S_{4z} = -1/2\rangle - |S_{3z} = -1/2, S_{4z} = 1/2\rangle) \end{aligned}$$

per cui l'operatore $(\vec{S}_3 - \vec{S}_4)$, per quanto detto sopra, invertendo la simmetria manda lo stato $S_{34} = 1$ nello stato $S_{34} = 0$ e viceversa. Ne consegue che gli stati a S_{34} definito hanno autovalore nullo, infatti data l'asimmetria dello stato $S_{34} = 0$, questo non può avere elementi di matrice. Ma allora anche lo stato $S_{34} = 1$, in quanto:

$$H_0 ||0, 1, 1, S_z\rangle \rightarrow ||0, 0, 1, S_z\rangle$$

ma questo stato non esiste e quindi va in zero.

Gli stati a), c), d), e) sono dunque ad autovalore nullo (10 stati degeneri). Rimangono da calcolare gli autovalori degli stati b1) e b2) che sono gli stessi per il teorema di Wigner-Eckart. Si introduca la base $|S_{1z}, S_{2z}, S_{3z}, S_{4z}\rangle$ e si calcoli l'autovalore $||1, 0, 1, 1\rangle$:

$$\begin{aligned} H_0 ||0, 1, 1, S_z\rangle &= H_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2, 1/2, 1/2, -1/2\rangle - |1/2, 1/2, -1/2, 1/2\rangle) = \\ &= \frac{\omega}{\hbar\sqrt{2}} \left[(S_{1z} + S_{2z})(S_{3z} - S_{4z}) + \frac{1}{2}(S_{1+} + S_{2+})(S_{3-} - S_{4-}) \right] \times \\ &\quad \times (|1/2, 1/2, 1/2, -1/2\rangle - |1/2, 1/2, -1/2, 1/2\rangle) = \\ &= \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} [(|1/2, 1/2, 1/2, -1/2\rangle + |1/2, 1/2, -1/2, 1/2\rangle) + \\ &\quad + (-|1/2, 1/2, 1/2, 1/2\rangle - |1/2, -1/2, 1/2, 1/2\rangle) + 0] = \\ &= \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} [2||S_{12} = 1, S_{12z} = 0, S_{34} = 1, S_{34z} = 0\rangle - \\ &\quad - ||S_{12} = 1, S_{12z} = 0, S_{34} = 1, S_{34z} = 0\rangle] = \\ &= \sqrt{2}\hbar\omega ||1, 1, 1, 1\rangle \end{aligned}$$

cioè $H_0 ||0, 1, 1, S_z\rangle = \sqrt{2}\hbar\omega ||1, 1, 1, 1\rangle$, per cui gli autovalori del gruppo b2) sono $\sqrt{2}\hbar\omega$ e siccome H_0 manda stati con $S_{34} = 0$ in stati con $S_{34} = 1$ e viceversa, gli autovalori del gruppo b1) sono $-\sqrt{2}\hbar\omega$.

Gli autovalori possono essere ricavati anche per altra via. Facendo agire due volte H_0 :

$$H_0 H_0 ||1, 0, 1, S_z\rangle = |E|^2 ||1, 0, 1, S_z\rangle \Rightarrow \langle 1, 0, 1, S_z | H_0^2 | 1, 0, 1, S_z \rangle = |E|^2$$

ed il valore medio $\langle H_0^2 \rangle$ si calcola come:

$$\begin{aligned} \sum_{a,b=1}^4 \frac{\omega^2}{\hbar^2} \langle 1, 0, 1, S_z | (S_1 + S_2)_a (S_3 - S_4)_a (S_1 + S_2)_b (S_3 - S_4)_b | 1, 0, 1, S_z \rangle = \\ \sum_{a,b=1}^4 \frac{\omega^2}{\hbar^2} \langle 1, S_{12z} | | (S_1 + S_2)_a (S_1 + S_2)_b | | 1, S_{12z} \rangle \langle 0, 0 | | (S_3 - S_4)_a (S_3 - S_4)_b | | 0, 0 \rangle \end{aligned}$$

Siccome $(S_3 - S_4)$ cambia stato:

$$\langle 0, 0 | | (S_3 - S_4)_a (S_3 - S_4)_b | | 0, 0 \rangle \propto \delta_{a,b} = \frac{1}{3} \langle 0, 0 | | (\vec{S}_3 - \vec{S}_4)^2 | | 0, 0 \rangle$$

e

$$\frac{1}{3} \langle 0, 0 | | (\vec{S}_3 - \vec{S}_4)^2 | | 0, 0 \rangle = \frac{2\omega^2}{\hbar^2} \hbar^4 = 2\hbar^2\omega^2 = |E|^2$$

Ancora meglio, siccome E è 6 volte degenera, vale $\text{Tr } H_0^2 = 6|E|^2$, da cui:

$$\begin{aligned} \text{Tr } H_0^2 &= \frac{\omega^2}{\hbar^2} \sum_{a,b=1}^4 (S_{1a} + S_{2a})(S_{3a} - S_{4a})(S_{1b} + S_{2b})(S_{3b} - S_{4b}) = \\ &= \frac{\omega^2}{\hbar^2} \sum_{a,b=1}^4 (S_{1a}S_{1b} + S_{2a}S_{1b})(S_{3a}S_{3b} - S_{4a}S_{34b}) = \\ &= \frac{\omega^2}{\hbar^2} \sum_{a,b=1}^4 \left(2\frac{\hbar^2}{4}\delta_{a,b}\right) \left(2\frac{\hbar^2}{4}\delta_{a,b}\right) = \frac{\hbar^2\omega^2}{4} \sum_{a,b=1}^4 \delta_{a,b}\delta_{a,b} = \frac{3\hbar^3\omega^2}{4} 16 \end{aligned}$$

ovvero:

$$|E|^2 = \frac{1}{3} \frac{3\hbar^3\omega^2}{4} 16 = 2\hbar^2\omega^2 \quad \rightarrow \quad E = \pm\sqrt{2}\hbar\omega$$

Si introduca ora la perturbazione $H' = \varepsilon\omega(S_{1z} - S_{2z} + S_{3z} + S_{4z})$.

S_z commuta sia con H_0 che con H' , conviene quindi raggruppare gli stati da perturbare secondo S_z e considerare $(\vec{S}_3 + \vec{S}_4)$, il quale oltre a identificare gli stati di H_0 commuta con H' :

$S_z = 2$	$ 1, 1, 2, 2\rangle$	$S_{34} = 1$
	$ 1, 1, 2, 1\rangle$	
$S_z = 1$	$ 1, 1, 1, 1\rangle$	$S_{34} = 1$
	$ 0, 1, 1, 1\rangle$	
	$ 1, 0, 1, 1\rangle$	$S_{34} = 0$
	$ 1, 1, 2, 0\rangle$	
$S_z = 0$	$ 1, 1, 1, 0\rangle$	$S_{34} = 1$
	$ 1, 1, 0, 0\rangle$	
	$ 0, 1, 1, 0\rangle$	
	$ 1, 0, 1, 0\rangle$	$S_{34} = 0$
	$ 0, 0, 0, 0\rangle$	

e in modo analogo per $S_z < 0$, nella base $||S_{12}, S_{34}, S, S_z\rangle$. In seguito si considererà anche la base $||S_{1z}, S_{2z}, S_{3z}, S_{4z}\rangle$ e $||S_{12}, S_{12z}, S_{34}, S_{34z}\rangle$.

Per calcolare la correzione all'energia occorrono gli elementi di matrice di H' calcolati fra gli stati elencati sopra. Di questi, gli elementi che coinvolgono $H' ||1, 0, 1, 1\rangle$ sono nulli, infatti:

$$H' ||1, 0, 1, 1\rangle = \epsilon\hbar\omega \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 \right) = 0$$

e analogamente per $||1, 1, 2, 2\rangle$, infatti:

$$H' ||1, 1, 2, 2\rangle = H' |1/2, 1/2, 1/2, 1/2\rangle = \epsilon\hbar\omega |1/2, 1/2, 1/2, 1/2\rangle = \epsilon\hbar\omega ||1, 1, 2, 2\rangle$$

Da questa relazione e dal teorema di Wigner-Eckart, essendo H' un termine $T_0^{(1)}$, si ricava:

$$\langle 1, 1, 2, S_z || H' || 1, 1, 2, S_z \rangle = C_{S_z 2 S_z}^{2 1 2} f(1, 1, 2, H', 1, 1, 2)$$

mentre per $S_z = 2$ vale:

$$C_{2 0 2}^{2 1 2} = \epsilon\hbar\omega f(1, 1, 2, H', 1, 1, 2) \Rightarrow f(1, 1, 2, H', 1, 1, 2) = \frac{\epsilon\hbar\omega}{C_{2 0 2}^{2 1 2}}$$

da cui si ricava che in generale vale:

$$\langle 1, 1, 2, S_z || H' || 1, 1, 2, S_z \rangle = \epsilon\hbar\omega \frac{C_{S_z 2 S_z}^{2 1 2}}{C_{2 0 2}^{2 1 2}} = \epsilon\hbar\omega \frac{S_z}{2}$$

Per gli altri termini occorre utilizzare la teoria delle perturbazioni in sottospazi di fissato S_z e S_{34} . Per $S_z = 1$ e $S_{34} = 1$ si devono quindi calcolare gli elementi della matrice:

$$\begin{array}{c} \langle 1, 1, 2, 1 | \\ \langle 1, 1, 1, 1 | \\ \langle 0, 1, 1, 1 | \end{array} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$$

dove $a_1 = \langle 1, 1, 2, 1 | H' | 1, 1, 2, 1 \rangle = \epsilon \hbar \omega / 2$ sfruttando la formula precedente. Per lo stato $||0, 1, 1, 1\rangle$, siccome vale $S_{12} = 0$, $S_{12_z} = 0$ ne consegue che $S_z = S_{3z} + S_{4z}$:

$$\begin{aligned} H' ||0, 1, 1, 1\rangle &= \epsilon \omega (S_{1z} - S_{2z}) ||0, 1, 1, 1\rangle + \epsilon \omega (S_{3z} + S_{4z}) ||0, 1, 1, 1\rangle = \\ &= \epsilon \omega (S_{1z} - S_{2z}) ||0, 1, 1, 1\rangle + \epsilon \omega S_z ||0, 1, 1, 1\rangle = \\ &= \epsilon \omega (S_{1z} - S_{2z}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2, -1/2, 1/2, 1/2\rangle - |-1/2, 1/2, 1/2, 1/2\rangle) + \epsilon \hbar \omega S_z ||0, 1, 1, 1\rangle = \\ &= \epsilon \hbar \omega \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2, -1/2, 1/2, 1/2\rangle - |-1/2, 1/2, 1/2, 1/2\rangle) + \epsilon \hbar \omega ||0, 1, 1, 1\rangle = \\ &= \epsilon \hbar \omega ||1, 0, 1, 1\rangle + \epsilon \hbar \omega ||0, 1, 1, 1\rangle = \epsilon \hbar \omega \frac{1}{\sqrt{2}} (||1, 1, 2, 1\rangle - ||1, 1, 1, 1\rangle) + \epsilon \hbar \omega ||0, 1, 1, 1\rangle \end{aligned}$$

ovvero in defittiva:

$$H' ||0, 1, 1, 1\rangle = \frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} ||1, 1, 2, 1\rangle - \frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} ||1, 1, 1, 1\rangle + \epsilon \hbar \omega ||0, 1, 1, 1\rangle$$

Da questo segue immediatamente che:

$$\begin{aligned} a_3 &= \langle 0, 1, 1, 1 | H' | 1, 1, 2, 1 \rangle = \frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} \\ a_5 &= \langle 0, 1, 1, 1 | H' | 1, 1, 1, 1 \rangle = -\frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} \\ a_6 &= \langle 0, 1, 1, 1 | H' | 0, 1, 1, 1 \rangle = \epsilon \hbar \omega \end{aligned}$$

Si considerino infine gli elementi $||1, 1, 1, 1\rangle$. Questo termine può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} ||1, 1, 1, 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (||1, 1, 1, 0\rangle - ||1, 0, 1, 1\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2, 1/2, 1/2, 1/2\rangle - |1/2, 1/2, -1/2, 1/2\rangle - |1/2, -1/2, 1/2, 1/2\rangle - |-1/2, 1/2, 1/2, 1/2\rangle) \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} H' ||1, 1, 1, 1\rangle &= \epsilon \omega (S_{1z} - S_{2z}) \frac{1}{\sqrt{2}} [|1/2, 1/2, 1/2, 1/2\rangle - |1/2, 1/2, -1/2, 1/2\rangle - |1/2, -1/2, 1/2, 1/2\rangle - \\ &\quad - |-1/2, 1/2, 1/2, 1/2\rangle] + \epsilon \omega (S_{3z} + S_{4z}) \frac{1}{\sqrt{2}} [||1, 1, 1, 0\rangle - ||1, 0, 1, 1\rangle] = \\ &= \frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} [0 - 0 - |1/2, -1/2, 1/2, 1/2\rangle + |-1/2, 1/2, 1/2, 1/2\rangle] - \frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} ||1, 0, 1, 1\rangle = \\ &= -\frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} ||0, 1, 1, 1\rangle - \frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} ||1, 0, 1, 1\rangle \end{aligned}$$

da cui:

$$H' ||1, 1, 1, 1\rangle = -\frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} ||0, 1, 1, 1\rangle - \frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} ||1, 1, 2, 1\rangle + \frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} ||1, 1, 1, 1\rangle$$

Segue immediatamente:

$$\begin{aligned} a_2 &= \langle 1, 1, 1, 1 | H' | 1, 1, 2, 1 \rangle = -\frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} \\ a_4 &= \langle 1, 1, 1, 1 | H' | 1, 1, 1, 1 \rangle = \frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

La matrice della perturbazione è quindi in definitiva la seguente:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \epsilon \hbar \omega$$

Poiché però solo gli stati $||1, 1, 2, 1\rangle$ e $||0, 1, 1, 1\rangle$ hanno energia $E^{(0)} = 0$ mentre lo stato $||1, 1, 1, 1\rangle$ ha energia $E^{(0)} = -\sqrt{2}\hbar\omega$, occorre applicare la teoria delle perturbazioni degeneri che richiede la diagonalizzazione della matrice (ottenuta considerando la sottomatrice relativa agli stati degeneri):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \epsilon \hbar \omega$$

Questa matrice ha per autovalori 0 e $3\hbar\omega/2$, cui corrispondono gli autovettori $(\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3})$ e $(1/\sqrt{3}, \sqrt{2/3})$, quindi le correzioni all'energia al I° e gli stati perturbati sono:

$$\begin{aligned} E_a^{(1)} = 0 \quad |a\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1, 1, 2, 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 1, 1, 1\rangle \\ E_b^{(1)} = \frac{3}{2}\epsilon\hbar\omega \quad |b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 1, 2, 1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0, 1, 1, 1\rangle \end{aligned}$$

Si considerino gli stati $||1, 1, 1, 1\rangle$ e $||1, 0, 1, 1\rangle$. Questi non sono autostati di H_0 , tuttavia lo è la combinazione:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1, 1, 1\rangle \pm |1, 0, 1, 1\rangle)$$

L'azione della perturbazione H' su questo stato è nota:

$$H' \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1, 1, 1\rangle \pm |1, 0, 1, 1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} H' |1, 1, 1, 1\rangle$$

Poiché le energie dei due stati di H_0 distano della stessa quantità da quella di $||1, 1, 1, 1\rangle$, uno al di sopra l'altro al di sotto, ne consegue che la correzione al I° ordine di questa è uguale e pari alla metà della correzione $\langle 1, 1, 1, 1 | H' | 1, 1, 1, 1 \rangle = \epsilon\hbar\omega/2$, per cui:

$$E_{\pm}^{(1)} = \frac{1}{4}\epsilon\hbar\omega$$

Si considerino ora gli stati con $S_z = 0$, $S_{34} = 0$, cioè $||1, 0, 1, 0\rangle$ e $||0, 0, 0, 0\rangle$. Dalla relazione sui coefficienti di Clebsch-Gordan:

$$C_{m_1 m_2 m}^{l_1 l_2 l} = (-1)^{l_1+l_2-l} C_{-m_1 -m_2 -m}^{l_1 l_2 l}$$

si ricava:

$$\langle 1, 0, 1, 0 | H' | 1, 0, 1, 0 \rangle = \langle 0, 0, 0, 0 | H' | 0, 0, 0, 0 \rangle = 0$$

e siccome vale anche:

$$H' |0, 0, 0, 0\rangle = \epsilon\omega (S_{1z} - S_{2z}) |0, 0, 0, 0\rangle = \epsilon\hbar\omega |1, 0, 1, 0\rangle$$

si ricava la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & \epsilon\hbar\omega \\ \epsilon\hbar\omega & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si vede che la correzione al I° ordine agli stati $||1, 0, 1, 0\rangle$ e $||0, 0, 0, 0\rangle$ è nulla.

Da questo risultato consegue che anche la correzione al I° ordine degli autostati $1/\sqrt{2}(|1, 1, 1, 0\rangle \pm |1, 0, 1, 0\rangle)$ è nulla in quanto:

$$H' \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1, 1, 0\rangle \pm |1, 0, 1, 0\rangle) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} H' |1, 0, 1, 0\rangle = \pm \frac{\epsilon\hbar\omega}{\sqrt{2}} |1, 0, 1, 0\rangle$$

Per $S_z = 1$ e $S_{34} = 1$, ancora dalla proprietà citata sopra dei coefficienti di Clebsch-Gordan si ricava la matrice:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix} \epsilon \hbar \omega$$

proseguendo poi in analogia ai casi precedenti. Per $S_z = 0$ e $S_{34} = 1$, ancora dalla relazione sui coefficienti e dalle relazioni:

$$\begin{aligned} H' ||0, 1, 0, 0\rangle &= \epsilon \omega (S_{1z} - S_{2z}) ||0, 1, 1, 0\rangle = \epsilon \omega (S_{1z} - S_{2z}) ||0, 0, 1, 0\rangle = \epsilon \omega \hbar ||1, 0, 1, 0\rangle = \\ &= \epsilon \omega \hbar \left[\sqrt{\frac{2}{3}} ||1, 1, 2, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} ||1, 1, 0, 0\rangle \right] \\ H' ||1, 1, 1, 0\rangle &= H' \frac{1}{\sqrt{2}} [||1, 1, 1, -1\rangle - ||1, -1, 1, 1\rangle] = \frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} [- ||1, 1, 1, 1\rangle - ||1, -1, 1, 1\rangle] + 0 = \\ &= \epsilon \hbar \omega \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} ||1, 1, 2, 0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} ||1, 1, 0, 0\rangle \right] \end{aligned}$$

si può ricavare la matrice (ordinando i vettori come $||1, 1, 2, 0\rangle$, $||1, 1, 0, 0\rangle$, $||1, 1, 1, 0\rangle$, $||0, 1, 1, 0\rangle$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \epsilon \hbar \omega$$

Lo stato $||1, 1, 1, 0\rangle$ non ha $E^{(0)} = 0$, occorre quindi levare la riga e la colonna relative dalla matrice sopra, ottenendo la matrice da diagonalizzare:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \epsilon \hbar \omega$$

con autovalori $0, \pm \epsilon \hbar \omega$. Le correzioni al primo ordine sono date allora da:

$$\begin{aligned} E^{(1)} = 0 &\quad \rightarrow \quad ||1, 1, 0, 0\rangle \\ E^{(1)} \pm \epsilon \hbar \omega &\quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} ||0, 1, 1, 0\rangle \pm \left(\frac{1}{\sqrt{3}} ||1, 1, 2, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} ||1, 1, 0, 0\rangle \right) \end{aligned}$$

Capitolo 2

Teoria delle Perturbazioni

2.1 Teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo

Sia data una Hamiltoniana con le sue autofunzioni $H_0|n\rangle = E_n^{(0)}|n\rangle$, e si consideri l'Hamiltoniana perturbata:

$$H = H_0 + \epsilon H'$$

Il problema è che si cerca un autovalore E_ϵ ed un'autofunzione ψ_ϵ soluzioni dell'equazione agli autovalori $H|\psi_\epsilon\rangle = E_\epsilon|\psi_\epsilon\rangle$ che differiscano di "poco" rispettivamente dall'autovalore e dall'autofunzione imperturbati che risolvono l'equazione $H_0|n\rangle = E_n^{(0)}|n\rangle$. L'autovalore e l'autofunzione perturbati devono ridursi ai rispettivi imperturbati nel caso la perturbazione vada a zero:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon = E^{(0)} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\psi_\epsilon\rangle = |\psi^{(0)}\rangle$$

se ora ϵ è molto piccolo rispetto ad H_0 si può richiedere che la soluzione sia uno sviluppo in serie di potenze di ϵ dato da:

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{(0)} + \epsilon E_n^{(1)} + \epsilon^2 E_n^{(2)} + \dots \\ \psi_n &= \psi_n^{(0)} + \epsilon \psi_n^{(1)} + \epsilon^2 \psi_n^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

dove:

$$(H_0 + \epsilon H') \psi_n = E_n \psi_n$$

Esplicitando quindi la relazione di sopra:

$$\begin{aligned} (H_0 + \epsilon H') \left(\psi_n^{(0)} + \epsilon \psi_n^{(1)} + \epsilon^2 \psi_n^{(2)} + \dots \right) = \\ \left(E_n^{(0)} + \epsilon E_n^{(1)} + \epsilon^2 E_n^{(2)} + \dots \right) \left(\psi_n^{(0)} + \epsilon \psi_n^{(1)} + \epsilon^2 \psi_n^{(2)} + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

e tralasciando l'ordine 0 che fornisce l'equazione non perturbata $H_0 \psi_n^{(0)} = E_n \psi_n^{(0)}$ si trova al I° ordine:

$$H' \psi_n^{(0)} + H_0 \psi_n^{(1)} = E_n^{(0)} \psi_n^{(1)} + E_n^{(1)} \psi_n^{(0)}$$

La correzione all'energia si trova moltiplicando scalarmente per $\psi_n^{(0)}$:

$$\langle \psi_n^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle + \langle \psi_n^{(0)} | H_0 | \psi_n^{(1)} \rangle = E_n^{(0)} \langle \psi_n^{(0)} | \psi_n^{(1)} \rangle + E_n^{(1)} \langle \psi_n^{(0)} | \psi_n^{(0)} \rangle$$

notando che $\langle \psi_n^{(0)} | H_0 | \psi_n^{(1)} \rangle = E_n^{(0)} \langle \psi_n^{(0)} | \psi_n^{(1)} \rangle$ e dalla condizione di normalizzazione $\langle \psi_n^{(0)} | \psi_n^{(1)} \rangle = 0$ delle autofunzioni ψ_n si ricava:

$$\boxed{E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle}$$

in altri termini, la correzione al I° ordine è data dagli elementi diagonali della perturbazione.

Per trovare invece la correzione all'autofunzione al I° ordine si moltiplica scalarmente per $\psi_m^{(0)}$:⁽¹⁾

$$\langle \psi_m^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle + E_m^{(0)} \langle \psi_m^{(0)} | \psi_n^{(1)} \rangle = E_n^{(0)} \langle \psi_m^{(0)} | \psi_n^{(1)} \rangle$$

da cui:

$$\langle \psi_m^{(0)} | \psi_n^{(1)} \rangle = \frac{H'_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \quad H'_{mn} \equiv \langle \psi_m^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle$$

ovvero:

$$\boxed{|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{H'_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\psi_m^{(0)}\rangle} \quad (2.2)$$

Per trovare le correzioni al secondo ordine, prendiamo i termini in ϵ^2 dalla (2.1) ricavando:

$$H_0 |\psi_n^{(2)}\rangle + H' |\psi_n^{(1)}\rangle = E_n^{(0)} |\psi_n^{(2)}\rangle + E_n^{(1)} |\psi_n^{(1)}\rangle + E_n^{(2)} |\psi_n^{(0)}\rangle$$

moltiplicando scalarmente per $\langle \psi_n^{(0)} |$:

$$\langle \psi_n^{(0)} | H_0 | \psi_n^{(2)} \rangle + \langle \psi_n^{(0)} | H' | \psi_n^{(1)} \rangle = E_n^{(0)} \langle \psi_n^{(0)} | \psi_n^{(2)} \rangle + E_n^{(1)} \langle \psi_n^{(0)} | \psi_n^{(1)} \rangle + E_n^{(2)} \langle \psi_n^{(0)} | \psi_n^{(0)} \rangle$$

ricordando che H_0 è hermitiano e l'ortonormalità delle autofunzioni:

$$\langle \psi_n^{(0)} | H' | \psi_n^{(1)} \rangle = E_n^{(2)}$$

e sostituendo l'espressione (2.2) di $|\psi_n^{(1)}\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \psi_n^{(0)} | H' | \psi_n^{(1)} \rangle &= \langle \psi_n^{(0)} | H' | \sum_{m \neq n} \frac{H'_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\psi_m^{(0)}\rangle \rangle = \\ &= \sum_{m \neq n} \frac{H'_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \langle \psi_n^{(0)} | H' | \psi_m^{(0)} \rangle = \sum_{m \neq n} \frac{|H'_{mn}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \end{aligned}$$

quindi per la correzione al II° ordine dell'energia si trova:

$$\boxed{E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|H'_{mn}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}}$$

La presenza di autovalori degeneri con $H'_{mn} \neq 0$ rende questa formula priva di senso. Quello che accade in questo caso è che il sottospazio $S_{E^{(0)}}$ – ad esempio relativo all'autovalore $E^{(0)}$ – ha dimensione maggiore di 1 e pertanto non è possibile individuare un'unica autofunzione imperturbata cui deve tendere la ψ_ϵ :

$$S_{E^{(0)}} \rightarrow (\psi_1^{(0)}, \dots, \psi_k^{(0)})$$

Il problema è che esistono stati con $n \neq m$ ma con la stessa energia $E_n^{(0)} = E_m^{(0)}$. La formula precedente non ha dunque senso a meno che non risulti proprio $\langle n | H' | m \rangle = 0$ per $n \neq m$, ovvero se la perturbazione è diagonale nel sottospazio degenere. Consideriamo quindi gli elementi di matrice di questo sottospazio:

$$\begin{pmatrix} H'_{11} & \cdots & H'_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ H'_{k1} & \cdots & H'_{kk} \end{pmatrix}$$

questa matrice è in effetti hermitiana perché H' stesso è hermitiano. Ma questo significa che la “sottomatrice” può sempre essere diagonalizzata e poiché la base di autovettori del sottospazio degenere si può scegliere arbitrariamente, si può scegliere una nuova base:

$$|\psi_i^{(0)}\rangle = \bigcup_i^j |\psi_j^{(0)}\rangle$$

¹Si noti che $\langle \psi_m^{(0)} | \psi_n^{(0)} \rangle = 0$.

che diagonalizza la matrice del sottospazio ed i cui autovalori rappresentano le correzioni al I° ordine dell'energia. Tale scelta permette di eliminare al II° ordine i termini che annullano il denominatore

È importante sottolineare che questa situazione induce a dubitare del metodo perturbativo anche quando $E_n \approx E_m$, ed infatti quello che conta è che la differenza fra gli autovalori sia grande rispetto all'elemento di matrice H_{mn} .

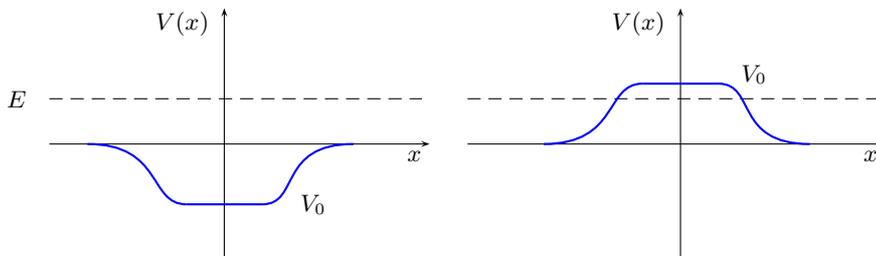
Se dopo la diagonalizzazione del sottospazio rimane ancora degenerazione, si passa a diagonalizzare al II° ordine, cioè il termine:

$$\frac{H'_{nm} H'_{ml}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

Capitolo 3

Diffusione alla Rutherford

È nota la corrispondenza secondo la quale a stati legati in meccanica classica corrispondono stati quantistici con spettro discreto e a stati liberi corrispondono stati quantistici con spettro continuo. Si consideri un potenziale unidimensionale del tipo:



Nel caso della figura a sinistra, gli stati legati hanno la forma asintotica $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = e^{\pm\alpha x}$ e gli stati liberi sono onde piane.

Nel caso invece della figura a destra risulta $0 < E < V_0$, si supponga quindi una particella incidente da sinistra. Per x positivi la particella può evidentemente viaggiare solo verso destra, mentre per $x < 0$ la particella può viaggiare in entrambe le direzioni.¹ Asintoticamente quindi vale:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\simeq c \cdot e^{ikx} && \text{per } x \rightarrow +\infty \\ \psi(x) &\simeq a \cdot e^{ikx} + b \cdot e^{-ikx} && \text{per } x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

La densità di corrente per funzioni di tipo $e^{\pm ikx}$ è $j = \pm \hbar k/m$. Inoltre, la probabilità che l'onda sia trasmessa è data dal rapporto fra l'onda trasmessa e quella incidente, ovvero $|c|^2/|a|^2$ (*coefficiente di trasmissione*), mentre la probabilità che l'onda sia riflessa è data dal rapporto fra l'onda riflessa e quella incidente $|b|^2/|a|^2$ (*coefficiente di riflessione*). Ovviamente, deve risultare $|a|^2 = |b|^2 + |c|^2$.

Interessa ora studiare l'analogo tridimensionale di questo problema e quindi occorre prendere in considerazione anche la direzione della particella diffusa, ovvero l'angolo a cui è avvenuta la deviazione (*angolo di diffusione*). Si supponga in quanto segue che il potenziale sia un potenziale centrale.

La teoria dello scattering (quantistica) è essenzialmente la teoria delle perturbazioni indipendente dal tempo applicata al caso di spettro continuo. Questo significa che per ogni energia possibile E è noto un autostato dell'Hamiltoniana completa. Nella teoria dello scattering si prende quindi un valore E e si cerca di trovare lo stato perturbato $|\psi_E(\vec{r})\rangle$. Si ricordi però che per ogni data energia ci sono in genere diversi autostati degeneri, la questione è quindi quella di trovare gli stati giusti nella (presumibilmente infinita) degenerazione relativa ai valori di E . La risposta a questa questione viene dalla *causalità*, quello che si vuole fare è infatti essere capaci di specificare completamente

¹Questo è valido anche classicamente.

lo stato iniziale a $\vec{r} = -\infty$ e ricavare tramite la teoria la corrente di uscita. Per fare questo si sceglie prima un autostato imperturbato con la corrente in ingresso richiesta, successivamente si fa in modo che la teoria delle perturbazioni non generi altre correnti in ingresso: questo può essere fatto introducendo “a mano” la condizione di causalità. In questo modo infatti, gli autostati risultanti avranno la corretta corrente in ingresso. Riformulando questo in termini più usuali, la risoluzione dell’equazione differenziale associata al problema richiede naturalmente l’imposizione di opportune condizioni iniziali, che è proprio quello che è stato chiamato “causalità”.

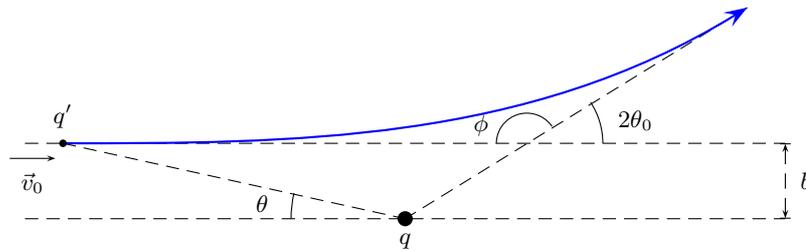
3.1 Trattazione Classica

Consideriamo ora la diffusione di una particella con carica q' e velocità v da parte di una particella di carica q e molto più pesante di quella incidente. Questo permette di considerare quest’ultima particella come ferma.

Nel caso il parametro d’urto sia nullo² la particella è diffusa esattamente a 0° , ovvero torna indietro e raggiunge la distanza minima dettata dalla legge di conservazione dell’energia:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{e^2}{r_{\min}} \quad \Rightarrow \quad r_{\min} = \frac{2e^2}{mv_0^2}$$

Nel caso il parametro d’urto non sia nullo, la particella viene deviata dalla sua traiettoria originale:



Utilizzando le coordinate polari, le equazioni di Lagrange si scrivono:

$$\begin{cases} m\ddot{r} = \frac{qq'}{r^2} + m\dot{\theta}^2 \\ r^2\dot{\theta} = \text{costante} = K \text{ (velocità areolare)} \end{cases}$$

La quantità che interessa è la variazione di r rispetto a θ , ovvero $dr/d\theta$:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{K^2}{r^2}$$

e ancora:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\theta} \frac{K^2}{r^2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\theta} \right) \frac{K^2}{r^2} + \frac{dr}{d\theta} \frac{d}{dt} \frac{K^2}{r^2} = \\ &= \frac{d^2r}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} \frac{K^2}{r^2} + \frac{dr}{d\theta} \frac{d}{dt} \left(\frac{K^2}{r^2} \right) = \frac{d^2r}{d\theta^2} \frac{K^2}{r^2} + \frac{dr}{d\theta} \frac{d}{dt} \frac{d}{dr} \left(\frac{K^2}{r^2} \right) = \\ &= \frac{K^2}{r^4} \frac{d^2r}{d\theta^2} - 2 \frac{dr}{d\theta} \frac{K^2}{r^3} \frac{dr}{d\theta} \frac{K^2}{r^2} = \frac{K^2}{r^4} \frac{d^2r}{d\theta^2} - 2 \frac{K^2}{r^5} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \end{aligned}$$

e sostituendo questo risultato nell’equazione di Lagrange:

$$\frac{mK^2}{r^4} \frac{d^2r}{d\theta^2} - 2 \frac{mK^2}{r^5} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{qq'}{r^2} + \frac{mK^2}{r^4}$$

²Ricordiamo che il *parametro d’urto* è definito come la distanza b fra la direzione del corpo incidente ed una retta ad essa parallela passante per il corpo fermo.

ovvero:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2} - \frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{qq'}{mK^2} + \frac{1}{r}$$

notando ora che:

$$\frac{d(1/r)}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

si ricava che:

$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{dr}{d\theta} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2} = \frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2}$$

e dunque l'equazione diventa:

$$-\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} = \frac{qq'}{mK^2} + \frac{1}{r}$$

che oltre alla soluzione costante ammette per soluzione una combinazione lineare di seni e coseni, che scriviamo per comodità come:

$$\frac{1}{r} = A \cos(\theta - \theta_0) - \frac{qq'}{mK^2}$$

e dove le costanti A e θ_0 si ricavano evidentemente dalle condizioni iniziali. Imponendo che a $\theta = 0$ valga $r = -\infty$ ⁽³⁾ si ricava:

$$A \cos(-\theta_0) = \frac{qq'}{mK^2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{qq'}{mK^2} \frac{1}{\cos \theta_0}$$

da cui:

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{qq'}{mK^2} \left[\frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\cos \theta_0} - 1 \right]}$$

Notiamo ora che vale:

$$\frac{d(1/r)}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(1/r)}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

Sviluppando ora i calcoli:

$$\frac{qq'}{mK^2} \left[\frac{\sin(\theta - \theta_0)}{\cos \theta_0} \right] \dot{\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

e considerando che $r^2 \dot{\theta} = K$ e che $dr/dt = v(t)$ è la velocità della particella:

$$\frac{qq'}{mK} \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{\cos \theta} = -v(t)$$

L'angolo θ_0 si ricava ora imponendo che per $\theta \rightarrow \theta_0$, $v(t) \rightarrow v_0$:

$$\frac{qq'}{mK} \tan \theta_0 = v_0$$

Consideriamo il termine $\cos(\theta - \theta_0)$. Esso vale 1 quando $\theta = \theta_0$, di conseguenza $1/r$ è massimo e r è minimo a θ_0 . A $\theta = 2\theta_0$ la particella è di nuovo a infinito e quindi l'angolo di diffusione è:

$$\boxed{\phi = \pi - 2\theta_0}$$

Fra K e $v(t)$ esiste ancora una relazione. Infatti a $r = \infty$ si verifica $r^2 \dot{\theta} = bv_0 = K$, per cui:

$$\boxed{b = \frac{qq'}{mv_0^2} \tan \theta_0}$$

³Ipotesi ragionevole, in quanto corrisponde a dire che quando la particella è infinitamente lontana prima dell'interazione, l'angolo sotto cui vede il bersaglio è 0° .

La sezione d'urto del processo si ricava considerando una corona circolare nel parametro d'urto b :

$$\begin{aligned} 2\pi b db &= 2\pi \left(\frac{qq'}{mv_0^2} \right)^2 \tan \theta_0 d(\tan \theta_0) = 2\pi \left(\frac{qq'}{mv_0^2} \right)^2 \frac{\tan \theta_0}{\cos^2 \theta_0} d\theta_0 = \\ &= 2\pi \left(\frac{qq'}{mv_0^2} \right)^2 \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} d\theta_0 = 2\pi \left(\frac{qq'}{mv_0^2} \right)^2 \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0}{\cos^2 \theta_0} d\theta_0 = \\ &= \pi \left(\frac{qq'}{mv_0^2} \right)^2 \frac{\sin(2\theta_0)}{\cos^4 \theta_0} d\theta_0 \end{aligned}$$

Poiché ora $\theta_0 = \pi/2 - \phi/2$, vale $\sin(2\theta_0) = \sin \phi$ e $\cos \theta_0 = \sin(\phi/2)$ segue:

$$\pi \left(\frac{qq'}{mv_0^2} \right)^2 \frac{\sin \phi}{\cos^4 \theta_0} d\theta_0 = 2\pi \left(\frac{qq'}{mv_0^2} \right)^2 \frac{\sin \phi}{2 \sin^4(\phi/2)} d\phi$$

Infine, siccome $d\Omega = 2\pi \sin \phi d\phi$, si ricava:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{qq'}{mv_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\phi/2)}}$$

che è la nota *legge di diffusione di Rutherford*.

3.2 Trattazione Quantistica

L'energia⁴ di una particella non sottoposta a potenziale è $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ e il suo moto è descritto dalla funzione d'onda $\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ o, scegliendo l'asse z convenzionalmente come direzione del moto, $\psi(z) = e^{ikz}$. In presenza di un potenziale $V(\vec{r})$ centrale la funzione d'onda naturalmente si modifica e si assumerà che asintoticamente abbia la forma di un'onda piana sovrapposta a un'onda sferica:

$$\psi(r) = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

con θ angolo di diffusione, coincidente con la coordinata polare θ , e $f(\theta)$ la cosiddetta *ampiezza di diffusione*. La componente radiale della densità di corrente è data da:

$$j_r = \frac{\hbar}{2m} \frac{|f(\theta)|^2}{r} \left[e^{-ikr} \frac{d}{dr} \frac{e^{ikr}}{r} - e^{ikr} \frac{d}{dr} \frac{e^{-ikr}}{r} \right] = \frac{\hbar k}{m} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2}$$

e la probabilità che una particella passi nell'unità di tempo attraverso l'elemento di superficie $r^2 d\Omega$ è $j r^2 d\Omega = \frac{\hbar k}{m} |f(\theta)|^2 d\Omega$. La sezione d'urto differenziale è il rapporto fra questa e la densità di corrente dell'onda incidente $j = \hbar k / m$, per cui:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2}$$

ovvero *tutta la fisica della diffusione è contenuta nella funzione $f(\theta)$* .

L'equazione chiave per risolvere il problema è naturalmente sempre l'equazione di Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

con soluzioni $\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ quando $V = 0$. La condizione sulla soluzione lungo una retta è proprio:

$$\psi(r) = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3.1)$$

⁴Un eccellente articolo sullo scattering può essere trovato qui: <http://www.pa.msu.edu/~mmoore/852scattering.pdf>.

ovvero che sia costituita da un'onda piana entrante lungo z e un'onda sferica uscente. Lo scopo del problema è appunto intuire la corrispondenza:

$$V(r) \longrightarrow f(\theta)$$

Poichè il potenziale è assunto centrale e l'Hamiltoniana commuta con il momento angolare, le funzioni d'onda si possono scrivere nella forma:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{u_l(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (3.2)$$

in questo modo l'equazione di Schrödinger dipenderà solo da r :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right] u_l(r) = E u_l(r)$$

con le condizioni supplementari che $0 \leq r \leq \infty$ e $u_l(0) = 0$ affinché la soluzione non sia singolare nell'origine.

Supponiamo ora che per r piccoli il potenziale $V(r)$ sia trascurabile rispetto a $1/r^2$, si ha in questo caso:

$$-u_l''(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} u_l(r) = 0$$

e $u_l(r)$ deve andare come una potenza $u_l(r) \propto r^\lambda$:

$$\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2} = l(l+1)r^{\lambda-2}$$

che conduce evidentemente alle due condizioni $\lambda = -l$ e $\lambda = l+1$. La soluzione fisicamente accettabile è chiaramente $\lambda = l+1$ in quanto nell'altro caso la soluzione andrebbe nell'origine come r^{-l} e quindi divergerebbe. La soluzione accettabile va quindi a zero nell'origine come r^{l+1} a meno di una costante, che deriva dal fatto di aver escluso una soluzione.

La soluzione con $V = 0$ dipende da $\hbar^2/2m$ e $E = \hbar^2 k^2/2m$, essa dipende quindi in definitiva da kr ed è del tipo $j_l(kr)$. Se il potenziale $V = 0$ è nullo la soluzione assume quindi la forma:

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) j_l(kr) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{u_l(kr)}{r} P_l(\cos \theta)$$

il che permette di ricavare:

$$\boxed{u_l(kr) = r j_l(kr)}$$

dove $j_l(kr)$ sono le cosiddette **funzioni sferiche di Bessel (di prima specie)**. Le analoghe soluzioni irregolari nell'origine (proporzionali a r^{-l}) sono le funzioni di Neumann (funzioni sferiche di Bessel di seconda specie). Nel seguito si chiameranno semplicemente "funzioni di Bessel" le prime e "funzioni di Neumann" le seconde:

$$j_l(kr) \propto r^l \\ n_l(kr) \propto r^{-(l+1)}$$

dove vale:

$$j_l(kr) = (-1)^l k r^{l+1} \left[\frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \right]^l \frac{\sin(kr)}{kr} \quad (3.3a)$$

$$n_l(kr) = (-1)^l (kr)^{l+1} \left[\frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} \right]^l \frac{\cos(kr)}{kr} \quad (3.3b)$$

Le funzioni di Bessel costituiscono le soluzioni dell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche, nel caso in cui cioè la simmetria del problema rende quest'ultimo indipendente da una coordinata assiale. Per questo, sono spesso chiamate anche *armoniche cilindriche*. Questo è evidentemente il

caso del problema tridimensionale in esame, dove l'asse di simmetria è quello lungo il moto della particella.

Siccome l'espansione in serie del seno fornisce:

$$\sin kr = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (kr)^{2l+1}}{(2l+1)!}$$

l'operatore fornisce sempre una serie regolare in quanto non compare mai il termine $1/r$. Un discorso analogo può essere fatto per il coseno, che restituisce in questo caso sempre una serie non regolare.

La soluzione (3.2) ha allora la forma:

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\substack{0 \leq l < +\infty \\ -l \leq m \leq l}} j_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi)$$

Questi autostati del momento angolare della particella libera sono chiamati *onde parziali*.

È interessante guardare il comportamento di questa funzione d'onda vicino il punto di origine dello scattering, ovvero per $r \rightarrow 0$. Il comportamento della funzione di Bessel è dato da:

$$\lim_{r \rightarrow 0} j_l(kr) = \frac{(kr)^l}{(2l+1)!}$$

Questo significa che per $k \rightarrow 0$ tutte le onde parziali vanno velocemente a 0 eccetto quella con $l = 0$. Per ogni l esiste quindi una scala di energia al di sotto della quale la l -sima incidente è effettivamente zero nella regione di scattering. Questo significa che la l -sima componente dell'onda incidente non "vede" il bersaglio e quindi il suo contributo alla sezione d'urto è effettivamente nullo. Questo effetto è noto come *comportamento soglia (threshold behavior)* e conduce al noto risultato che per la maggior parte dei potenziali esiste un valore critico di k al di sotto del quale solo lo scattering delle onde S contribuisce significativamente all'ampiezza di scattering. Questa situazione è nota come *regime delle onde S (S-wave regime)*.

Supponiamo ora grandi valori di r e ancora trascurabile $V(r)$ rispetto a $1/r^2$. In questo caso si ritrova una serie di seni e coseni:

$$u(r) \propto A \sin(kr) + B \cos(kr)$$

perché a infinito non c'è bisogno di imporre la condizione di non singolarità nell'origine. Tuttavia, questa combinazione deve essere unica in quanto a piccoli r esiste una sola soluzione. I coefficienti devono quindi essere legati fra loro e si può scrivere:

$$u_l(r) \simeq A_l \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) \quad V = 0 \Rightarrow \delta_l = 0$$

dove si è introdotto il termine δ_l , chiamato *phase-shift delle onde parziali di scattering (partial-wave scattering phase-shift)*.

Poiché vale la (3.3a), a grandi r predomina il termine:

$$(-1)^l \frac{1}{r} \frac{d^l}{dr^l} \sin(kr)$$

e siccome vale $\cos \alpha = \sin(-\pi/2 + \alpha)$, per $r \rightarrow \infty$ si trova:

$$e^{ikz} + \frac{e^{ikr} f(\theta)}{r} = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l \frac{\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l)}{r} P_l(\cos \theta)$$

Ora vale:

$$\sum_{l=0}^{+\infty} A_l P_l(\cos \theta) \frac{1}{r} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) = \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(\cos \theta) (2l+1) i^l \sin(kr - \pi/2) \frac{1}{kr} + e^{ikr} \sum_{l=0}^{+\infty} f_l(\theta) P_l(\cos \theta)$$

da cui l'identificazione:

$$\frac{A_l}{r} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) = (2l + 1) i^l \sin(kr - \pi/2) \frac{1}{kr} + e^{ikr} f_l(\theta)$$

e quindi:

$$\frac{A_l}{r} \frac{1}{2i} \left[e^{i(kr - l\pi/2 + \delta_l)} - e^{-i(kr - l\pi/2 + \delta_l)} \right] = \frac{i}{4ikr} (2l + 1) \left[e^{i(kr - l\pi/2)} - e^{-i(kr - l\pi/2)} \right] + \frac{1}{r} e^{ikr} f_l(\theta)$$

L'uguaglianza delle onde regressive⁵ permette ora di determinare A_l :

$$A_l(r) = i^l (2l + 1) \frac{1}{k} e^{i\delta_l}$$

in questo modo l'unica parte regressiva è in e^{ikz} . Per $f_l(\theta)$:

$$\frac{2l + 1}{2ki} e^{i\delta_l} e^{i\delta_l} = \frac{1}{4ik} (2l + 1) + f_l(\theta) \quad \Rightarrow \quad f_l(\theta) = \frac{2l + 1}{k} \frac{e^{i2\delta_l} - 1}{2i} = \frac{2l + 1}{k} \sin \delta_l e^{i\delta_l}$$

da cui:

$$f_l(\theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l + 1}{k} \sin \delta_l e^{ik\delta_l} P_l(\cos \theta)$$

Questo risultato notevole insieme alla (3.1) mostra che se non c'è scattering, lo shift δ_l è nullo. Quindi l'effetto dello scattering si limita ad introdurre degli sfasamenti δ_l fra le onde parziali. *Pertanto tutta l'informazione che si può ottenere sul bersaglio, almeno a $r = +\infty$, è contenuta nella serie di phase-shift $\{\delta_1(k), \delta_2(k), \dots\}$.*

SFERA IMPENETRABILE

Consideriamo il caso di una sfera impenetrabile, definita quindi dal potenziale:

$$\begin{cases} r \leq r_0 \rightarrow V = +\infty \\ r > r_0 \rightarrow V = 0 \end{cases}$$

in questo caso si può richiedere solo la continuità della funzione, ma non della sua derivata prima. Per $r > r_0$ la soluzione generica è:

$$u_l(kr) = B_l j_l(kr) + C_l n_l(kr)$$

infatti in questo caso non ci può essere la singolarità nell'origine dovuta alle funzioni di Neumann (a $r = 0$ vale $V = +\infty$). Per $r \leq r_0$ invece deve valere $u_l(kr) \equiv 0$, di conseguenza basta porre:

$$B_l = n_l(kr_0) \quad C_l = -j_l(kr_0)$$

L'andamento asintotico risulta allora:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u_l(r) \simeq \frac{1}{r} \left[n_l(kr_0) \sin(kr - l\pi/2) - j_l(kr_0) \cos(kr - l\pi/2) \right]$$

che confrontata con la forma:

$$\frac{A_l}{r} \left[\sin(kr - l\pi/2) \cos \delta_l - \cos(kr - l\pi/2) \sin \delta_l \right]$$

permette di ricavare:

$$\tan \delta_l = -\frac{j_l(kr_0)}{n_l(kr_0)}$$

⁵In pratica quella che si è chiamata condizione di *causalità* nell'introduzione.

ma per kr_0 molto piccolo vale:

$$\begin{cases} j_l(kr_0) \simeq -\frac{1}{l} r^l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^l \frac{\sin(kr)}{r} \\ n_l(kr_0) \simeq -\frac{1}{l} r^l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^l \frac{\cos(kr)}{r} \end{cases}$$

siccome si parla di kr piccoli, si possono espandere il seno e il coseno in serie di potenze e fermarsi al primo ordine:⁶

$$\begin{aligned} j_l(kr_0) &\simeq -\frac{1}{l} r^l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^l \frac{(-1)^l (kr)^{2l+1}}{(2l+1)!} = \frac{(kr_0)^l}{(2l+1)!!} \\ n_l(kr_0) &\simeq \frac{(1+2l)!!}{r^{l+1}} k \end{aligned}$$

da cui:

$$\tan \delta_l = -\frac{(kr_0)^{2l+1}}{[(2l+1)!!]^2}$$

Nel caso di onda sferica S , ovvero $l = 0$, $\tan \delta_l = -kr_0$ e quindi:

$$f(\theta) = -\frac{1}{k} kr_0 = -r_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = 4\pi r_0^2}$$

e quindi 4 volte quello che ci si attenderebbe classicamente, ovvero $\sigma = \pi r_0^2$.

SFERA PENETRABILE (“MORBIDA”)

Si consideri il caso di potenziale definito come:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & r \leq r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

con V_0 positivo o negativo. Se si pone $E - V_0 = \hbar^2 \tilde{k}^2 / 2m$ per $r \leq r_0$, l'equazione radiale diventa:

$$\left[-\frac{d^2}{d(\tilde{k}r^2)} + \frac{l(l+1)}{(\tilde{k}r)^2} \right] u_l(r) = u_l(r)$$

che ha come soluzioni regolari in 0 proprio le $j_l(\tilde{k}r_0)$. Per $r > r_0$ la soluzione generale è invece:

$$u_l(r > r_0) = a j_l(kr) + b n_l(kr)$$

con a e b arbitrati e ricavati dalle condizioni di continuità sulla funzione e sulla sua derivata prima in $r = r_0$:

$$\begin{aligned} j_l(\tilde{k}r_0) &= a j_l(kr_0) + b n_l(kr_0) \\ \tilde{k} j_l'(\tilde{k}r_0) &= a k j_l'(kr_0) + b k n_l'(kr_0) \end{aligned}$$

Ma per gli sfasamenti vale la relazione $\tan \delta_l = b/a$ per cui:

$$\tan \delta_l = \frac{\tilde{k} j_l(kr_0) j_l'(\tilde{k}r_0) - k j_l(\tilde{k}r_0) j_l'(kr_0)}{k j_l(\tilde{k}r_0) n_l'(kr_0) - \tilde{k} n_l(kr_0) j_l'(\tilde{k}r_0)}$$

⁶Ricordiamo che con la notazione $n!!$ si intende il *doppio fattoriale* o *semifattoriale*, definito come:

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 & n > 0 \text{ dispari} \\ n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 & n > 0 \text{ pari} \\ 1 & n = -1, 0 \end{cases}$$

e nel caso $kr_0 \ll 1$ e $\tilde{k}r_0 \ll 1$ questa relazione diviene:

$$\tan \delta_l \simeq - \frac{[2^l l! / (2l+1)!] \tilde{k} (kr_0)^{l+1} (l+1) \tilde{k}^{l+1} r_0^l - \tilde{k} (kr_0)^{l+1} (l+1) k^{l+1} r_0^l}{[2^l l! / (2l+1)!] k \frac{(\tilde{k}r_0)^{l+1}}{k^l} (-l) r_0^{-(l+1)} - \frac{\tilde{k}}{k^l} r_0^{-l} (l+1) \tilde{k}^{l+1} r_0^l}$$

da cui semplificando l'espressione:

$$\tan \delta_l \simeq \frac{2^{2l} (l!)^2 (2l)!}{(2l+1)!} (l+1) \frac{\tilde{k} - k}{(k + \tilde{k})l + \tilde{k}}$$

e siccome vale $\tilde{k} \pm k = \sqrt{2m/\hbar^2}(\sqrt{E-V_0}) \pm \sqrt{E}$, segue:

$$\tan \delta_l \simeq \frac{2^{2l} (l!)^2 (2l)!}{(2l+1)!} (l+1)(l+1) \frac{\sqrt{E-V_0} - \sqrt{E}}{(\sqrt{E-V_0} + \sqrt{E})l + \sqrt{E-V_0}}$$

e risulta $\delta_l \leq 0$ a seconda di $V_0 \leq 0$.

Discutiamo ora la dipendenza di δ_l da $V(r)$. Lo scopo finale è calcolare i $\tilde{\delta}_l$ relativi al potenziale $\tilde{V}(r)$ una volta noti i δ_l relativi a $V(r)$ ed essendo $\tilde{V}(r)$ prossimo a $V(r)$. Si tenga preliminarmente presente la relazione:

$$\int_0^{r_0} [f(r)g''(r) - f''(r)g(r)] dr = f(r)g'(r) - f'(r)g(r) \Big|_0^{r_0}$$

Le due equazioni di Schrödinger scritte rispetto ai due potenziali $V(r)$ e $\tilde{V}(r)$ hanno la forma:

$$\begin{cases} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) \right] u_l(r) = E u_l(r) \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + \tilde{V}(r) \right] \tilde{u}_l(r) = E \tilde{u}_l(r) \end{cases}$$

e applicando la relazione preliminare alle due funzioni $u_l(r)$ e $\tilde{u}_l(r)$:

$$u_l(r)\tilde{u}_l'(r) - u_l'(r)\tilde{u}_l(r) \Big|_0^{r_0} = u_l(r_0)\tilde{u}_l'(r_0) - u_l'(r_0)\tilde{u}_l(r_0)$$

perché deve valere $u_l(0) = \tilde{u}_l(0) = 0$. Se r è sufficientemente grande vale l'espressione asintotica:

$$\begin{aligned} u_l(r_0) &\rightarrow \sin(kr_0 - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) \\ u_l'(r_0) &\rightarrow k \cos(kr_0 - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) \end{aligned}$$

e analogamente per $\tilde{u}_l(r_0)$ con $\tilde{\delta}_l$. Allora:

$$k \left[\sin(kr_0 - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) \cos(kr_0 - \frac{l\pi}{2} + \tilde{\delta}_l) - \sin(kr_0 - \frac{l\pi}{2} + \tilde{\delta}_l) \cos(kr_0 - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) \right] = k \sin(\delta_l - \tilde{\delta}_l)$$

che sostituita nell'integrale fornisce:

$$\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^{r_0} [u_l(r)\tilde{u}_l(r)] [\tilde{V}(r) - V(r)] dr = k \sin(\delta_l - \tilde{\delta}_l)$$

Ora, se $\tilde{V}(r)$ è vicino a $V(r)$ allora $\tilde{u}_l(r)$ è vicino a $u_l(r)$:

$$\tilde{V}(r) = V(r) + \delta V \Rightarrow \tilde{u}_l(r) = u_l(r) + \vartheta(\delta V)$$

da cui:

$$\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^{r_0} u_l(r) [u_l(r) + \vartheta(\delta V)] \delta V dr = k \sin(\delta_l - \tilde{\delta}_l)$$

e trascurando il termine $\vartheta(\delta v)$, supposto piccolo:

$$\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^{r_0} |u_l(r)|^2 \delta V dr = k \sin(\delta_l - \tilde{\delta}_l)$$

e si vede che aumentando $\tilde{V}(r)$ diminuisce δ_l . Per potenziali piccoli vale:

$$\boxed{\frac{\hbar^2 k}{2m} \sin \tilde{\delta}_l = \int_0^{r_0} r^2 j_l^2(kr) \tilde{V}(r) dr \quad \text{Formula di Born}}$$

Poiché $\hbar^2 k/2m \equiv k/E$, il termine $\tilde{V}(r)$ deve essere misurato rispetto alla scala delle energie, dunque *se $\tilde{V}(r)/E$ è piccolo, allora δ_l cambia di poco. Il discorso è valido se $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ abbastanza rapidamente, in quanto questo andamento deve compensare il termine r^2 nell'integrale.*

Capitolo 4

L'Oscillatore Armonico

4.1 Oscillatore Armonico Unidimensionale

Si consideri l'Hamiltoniana quantistica dell'oscillatore armonico unidimensionale:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

per trovare lo stato fondamentale si può procedere come segue. Notiamo innanzitutto che l'Hamiltoniana si può riscrivere nella forma:

$$\frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x}^2 - \frac{i^2\hat{p}^2}{m^2\omega^2}\right) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) - \frac{\hbar\omega}{2}$$

dove il termine $\hbar\omega/2$ deriva dai prodotti incrociati:

$$\frac{i\hat{p}}{m\omega}\hat{x} - \hat{x}\frac{i\hat{p}}{m\omega} = -\frac{i}{m\omega}[\hat{x}, \hat{p}] = \frac{\hbar}{m\omega}$$

che moltiplicato per $m\omega^2/2$ fornisce proprio il termine $\hbar\omega/2$. Più in generale vale:¹

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x} \pm \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)\left(\hat{x} \mp \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \mp \frac{\hbar\omega}{2} \quad (4.1)$$

Denotando ora con $|\nu\rangle$ l'autofunzione $H|\nu\rangle = E_\nu|\nu\rangle$ si trova:

$$\begin{aligned} H\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)|\nu\rangle &= \\ &= \left\{ \left[\frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \right] + \frac{\hbar\omega}{2} \right\} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)|\nu\rangle = \\ &= (E_\nu + \hbar\omega)\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)|\nu\rangle \end{aligned}$$

ed in modo analogo:

$$H\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)|\nu\rangle = (E_\nu - \hbar\omega)\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)|\nu\rangle$$

Ora, dall'ipotesi che $|\nu\rangle$ sia un autovettore:

$$\langle\nu|\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2|\nu\rangle = E_\nu\langle\nu|\nu\rangle = E_\nu$$

¹Si noti che la (4.1) implica che:

$$\left[\frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x} \pm \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)\left(\hat{x} \mp \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \mp \frac{\hbar\omega}{2} \right]|\nu\rangle = E|\nu\rangle$$

ovvero che l'energia *minima* del sistema - corrispondente all'autofunzione $|0\rangle$ - vale $E_0 = \hbar\omega/2$.

ma:²

$$E_\nu = \frac{1}{2m} \|\hat{p}\nu\| + \frac{m\omega^2}{2} \|\hat{x}\nu\| \geq 0$$

e quindi per un oscillatore armonico risulta sempre $E_\nu \geq 0$, ovvero che gli autovalori di H sono limitati inferiormente. La serie discendente di autovalori si deve pertanto fermare quando risulta $(\hat{x} + i\hat{p}/m\omega)|\bar{\nu}\rangle = 0$, ovvero tenendo conto che $\hat{p} = -i\hbar d/dx$:

$$\left(x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx}\right) f_{\bar{\nu}}(x) = 0$$

e quindi:

$$\frac{d}{dx} f_{\bar{\nu}}(x) = -\frac{m\omega}{\hbar} x f_{\bar{\nu}}(x) \Rightarrow \frac{df_{\bar{\nu}}(x)}{f_{\bar{\nu}}(x)} = -\frac{m\omega}{\hbar} x dx \Rightarrow f_{\bar{\nu}}(x) = f_{\bar{\nu}}(0) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

Ma l'autovalore corrispondente a $|0\rangle$ è già noto: $E_0 = \hbar\omega/2$. Pertanto gli unici valori permessi sono quelli che discendendo di $\hbar\omega$ ad ogni passo arrivano a $\hbar\omega/2$,³ sono quindi dati da $(2n+1)\hbar\omega/2$. Definiamo gli operatori:⁴

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$

a meno di un fattore di normalizzazione, questi sono gli operatori già incontrati nella (4.1), si sa già dunque che essi riducono ed aumentano gli autovalori dell'energia di $\hbar\omega$. Inoltre, poichè il commutatore vale :

$$[a, a^\dagger] = -\frac{m\omega}{2\hbar} i \frac{[x, p]}{m\omega} = -\frac{2m\omega}{2\hbar} i \frac{i\hbar}{m\omega} = 1$$

l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico si può scrivere nella forma:

$$H = \hbar\omega \left(aa^\dagger - \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

Denotando ora con \hat{N} l'operatore $a^\dagger a$ e $|n\rangle$ un'autofunzione di \hat{N} ,⁵ si ha:

$$Na|n\rangle = (a^\dagger a)a|n\rangle = (aa^\dagger - 1)a|n\rangle = a(N-1)|n\rangle = (n-1)a|n\rangle$$

e analogamente:

$$\hat{N}a|n\rangle = (a^\dagger a)a^\dagger|n\rangle = a^\dagger(aa^\dagger)|n\rangle = a^\dagger(1+a^\dagger a)|n\rangle = a^\dagger(1+\hat{N})|n\rangle = (n+1)a^\dagger|n\rangle$$

Quindi se $|n\rangle$ è autostato di \hat{N} con autovalore n , allora $a|n\rangle$ è ancora autostato di \hat{N} ma con autovalore $(n-1)$, mentre $a^\dagger|n\rangle$ è autostato di autovalore $(n+1)$.

In pratica, l'operatore \hat{a} "distrukge" un livello di energia, mentre \hat{a}^\dagger "crea" un livello di energia.⁶ Valutiamo ora l'azione precisa degli operatori sfruttando il fatto che $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$.

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= C_n|n-1\rangle \rightarrow \langle n|a^\dagger a|n\rangle = n\langle n|n\rangle \equiv |C_n|^2 \langle n|n\rangle \\ a^\dagger|n\rangle &= C_n|n+1\rangle \rightarrow \langle n|aa^\dagger|n\rangle = \langle n|a^\dagger a + 1|n\rangle = (n+1)\langle n|n\rangle \equiv |C_n|^2 \langle n|n\rangle \end{aligned}$$

²Infatti, ad esempio, $\langle \nu | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \nu \rangle = \frac{1}{2m} \langle \hat{p}\nu | \hat{p}\nu \rangle = \|\hat{p}\nu\|^2 \geq 0$.

³Altrimenti, se si potesse ancora discendere ancora, l'autovalore successivo sarebbe $-\hbar\omega/2$ cadendo in contraddizione.

⁴Nel seguito, quando non ci sarà rischio di fraintendimento, si ometterà spesso la notazione "cappello".

⁵Scrivendo l'Hamiltoniana in termini di questo operatore e ricordando l'espressione trovata per gli autovalori, si trova:

$$\hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle$$

da cui si deduce che l'operatore \hat{N} su uno stato $|n\rangle$ restituisce il numero n dei quanti di energia. Per questo ci si riferisce a \hat{N} come all'*operatore numero*.

⁶Per questo vengono indicati rispettivamente come *operatore di distruzione* e *operatore di creazione*.

da cui:

$$\begin{cases} \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{cases}$$

La loro rappresentazione matriciale è data quindi da:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \sqrt{n} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \hat{a}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \ddots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{n+1} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico è dato da:

$$|0\rangle = \psi_0 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

e per applicazione iterata dell'operatore di creazione sullo stato fondamentale è possibile ottenere tutta la base:

$$|n\rangle = \frac{1}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle$$

mentre gli operatori \hat{x} e \hat{p} in termini degli operatori di creazione e distruzione sono dati da:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \quad p = \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} \frac{(a - a^\dagger)}{i}$$

Si consideri ora una perturbazione lineare del tipo $W = \epsilon kx$. Per ragioni dimensionali deve risultare $k = \sqrt{m\hbar\omega^3}$. L'Hamiltoniana del sistema perturbato è data da:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \epsilon kx \equiv H_0 + H' \quad H' \equiv \epsilon k \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger)$$

la correzione al primo ordine è pertanto data da:

$$\begin{aligned} \langle n|H'|n\rangle &= \epsilon k \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle n|a + a^\dagger|n\rangle = \\ &= \epsilon k \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n} \langle n|n-1\rangle + \sqrt{n+1} \langle n|n+1\rangle) = 0 \end{aligned}$$

Dunque la correzione al primo ordine $E_n^{(1)}$ è nulla e bisogna calcolare quella al secondo:

$$E_n^{(2)} = \epsilon k \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_m \frac{|H'_{mn}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

gli elementi di matrice sono dati da:

$$H'_{mn} = \epsilon k \left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \delta_{m,n-1} \sqrt{n} + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \delta_{m,n+1} \sqrt{n+1} \right]$$

la sommatoria si riduce quindi a due termini:

$$E_n^{(2)} = \epsilon^2 k^2 \frac{\hbar}{m\omega} \left[\frac{n}{\hbar\omega} + \frac{n+1}{-\hbar\omega} \right] = \boxed{-\frac{\epsilon^2 k^2}{2m\omega^2} = E_n^{(2)}}$$

La correzione al secondo ordine si può ottenere anche per altra via (soluzione esatta), scrivendo l'Hamiltoniana come:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \epsilon kx + \Delta E - \Delta E$$

e scegliendo ΔE in modo da completare il quadrato, ovvero proprio $-\frac{\epsilon^2 k^2}{2m\omega^2}$.⁷

Si consideri infine una perturbazione $W \propto x^4$. Ancora per ragioni dimensionali risulta $H' = \frac{m^2 \omega^4}{\hbar \omega} x^4$. Risulta anche:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \Rightarrow x^4 = \frac{\hbar^2}{4m^2 \omega^2} (a + a^\dagger)^4$$

Per evitare il calcolo di $(a + a^\dagger)^4$, che diviene rapidamente complesso in quanto a e a^\dagger non commutano, si può notare che:

$$\langle n | x^4 | n \rangle = \|x^2 | n \rangle\|^2$$

riducendosi quindi al calcolo di:

$$\begin{aligned} x^2 | n \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} (a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a) | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} (a^2 + a^{\dagger 2} + 2n + 1) | n \rangle = \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left[\sqrt{n(n+1)} | n-2 \rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)} | n+2 \rangle + (2n+1) | n \rangle \right] \end{aligned}$$

e quindi:

$$\langle n | x^4 | n \rangle = \frac{\hbar^2}{4m^2 \omega^2} [n(n+1) + (n+1)(n+2) + (2n+1)^2]$$

ed in definitiva:

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= \epsilon \frac{m^2 \omega^3}{\hbar} \frac{\hbar^2}{4m^2 \omega^2} [n^2 - n + n^2 + 3n + 2 + 4n^2 + 4n + 1] = \\ &= \frac{3}{4} \epsilon \hbar \omega (2n^2 + 2n + 1) \end{aligned}$$

Se il termine $\epsilon \cdot 2n^2 \sim 1$, allora lo sviluppo perturbativo non è più lecito. D'altra parte questo è evidente, visto che per n elevato le funzioni d'onda non sono più localizzate nell'origine e quindi il termine in x^4 diventa predominante. In questo caso, anzi, è addirittura il termine in x^2 che dovrebbe essere considerato come perturbazione (*oscillatore anarmonico quartico*).

Per il secondo ordine, a causa del termine $(a + a^\dagger)$ si considerano i termini che si spostano di 4 posti e di 2 posti:

$$E_n^{(2)} = \epsilon \left[\frac{|H'_{n-4,n}|^2}{4\hbar\omega} + \frac{|H'_{n-2,n}|^2}{2\hbar\omega} + \frac{|H'_{n+2,n}|^2}{-2\hbar\omega} \frac{|H'_{n+4,n}|^2}{-4\hbar\omega} \right]$$

Il calcolo dei termini $H'_{n-4,n}$ è semplice:

$$H'_{n-4,n} = \langle n-4 | x^4 | n \rangle = \langle n-4 | a^4 | n \rangle = \frac{\hbar}{4m^2 \omega^2} \frac{\epsilon m^2 \omega^2}{\hbar} \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

per cui:

$$|H'_{n-4,n}|^2 = \frac{\epsilon^2 \hbar^2 \omega^2}{16} n(n-1)(n-2)(n-3)$$

ed in modo analogo:

$$H'_{n+4,n} = \langle n+4 | x^4 | n \rangle = \langle n+4 | a^{\dagger 4} | n \rangle = \frac{\hbar}{4m^2 \omega^2} \frac{\epsilon m^2 \omega^2}{\hbar} \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

⁷Infatti:

$$\left(\frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \epsilon k x \right) = \left(\frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + 2\epsilon k \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{m\omega} x \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} + \frac{\epsilon^2 k^2}{2m\omega^2} \right) - \frac{\epsilon^2 k^2}{2m\omega^2}$$

per il calcolo dei termini $H'_{n\pm 2,n}$ si deve invece tenere conto di tutti i movimenti possibili di salita e discesa dallo stato n :

$$\langle n-2 | a^3 a^\dagger + a^2 a^\dagger a + a^\dagger a^3 + a a^\dagger a^2 | n \rangle = \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2} \sqrt{n(n-1)} (4n-2)$$

e:

$$|H'_{n-2,n}|^2 = \frac{\epsilon^2 \hbar^2}{32m^2\omega^2} \frac{m^2\omega^3}{\hbar} n(n-1)(4n-2)^2 = \frac{\epsilon^2 \hbar\omega}{32} n(n-1)(4n-2)^2$$

L'altro termine si trova in maniera analoga:

$$|H'_{n+2,n}|^2 = -\frac{\epsilon^2 \hbar\omega}{32} (n+1)(n+2)(4n+6)^2$$

e la correzione $E_n^{(2)}$ è data dalla somma dei due termini.

4.2 Oscillatore Armonico Tridimensionale

Il caso dell'oscillatore armonico tridimensionale presenta forte degenerazione e possono essere trovate tre basi diverse.

- Base Cartesiana

L'Hamiltoniana del sistema è data da:

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2|\vec{r}|^2 + \frac{1}{2m}|\vec{p}|^2 \equiv H^{(x)} + H^{(y)} + H^{(z)}$$

dove le $H^{(i)}$ sono le Hamiltoniane dell'oscillatore armonico unidimensionale, rispettivamente lungo x , y e z . Poiché vale:

$$[H^{(i)}, H^{(j)}] = 0 \quad i \neq j$$

si possono cercare autofunzioni del tipo $\psi_0 = e^{-\frac{m\omega^2}{2\hbar}(x^2+y^2+z^2)}$. In questo caso risulta (*base cartesiana*):

$$H|n_x, n_y, n_z\rangle = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})|n_x, n_y, n_z\rangle$$

Si possono definire gli operatori di creazione e distruzione nelle tre direzioni \hat{a}_x , \hat{a}_y e \hat{a}_z ; \hat{a}_x^\dagger , \hat{a}_y^\dagger e \hat{a}_z^\dagger . In termini di questi operatori le coordinate sono espresse da:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger) & \hat{y} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger) & \hat{z} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_z + \hat{a}_z^\dagger) \\ \hat{p}_x &= \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \frac{(\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger)}{i} & \hat{p}_y &= \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \frac{(\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger)}{i} & \hat{p}_z &= \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \frac{(\hat{a}_z - \hat{a}_z^\dagger)}{i} \end{aligned}$$

È possibile inoltre definire un operatore di creazione "totale" come:

$$\frac{(a_x^\dagger)^{n_x} (a_y^\dagger)^{n_y} (a_z^\dagger)^{n_z}}{\sqrt{n_x! n_y! n_z!}} |0, 0, 0\rangle = |n_x, n_y, n_z\rangle$$

- Base Polare

Siccome l'Hamiltoniana commuta con L^2 e L_z ,⁽⁸⁾ si può scegliere come base $||n, l, m\rangle$, introducendo il numero quantico che dipende dall'energia $n = n_x + n_y + n_z$. Questa è la cosiddetta *base polare*. L'uso di n come numero quantico introduce degenerazione, che è data da $\frac{(n+2)!}{n!2!} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Gli

⁸Si verifica facilmente che risulta:

$$[H, L^2] = [H, L_z] = 0$$

operatori a e a^\dagger sono in questo caso vettori,⁹ in quanto combinazioni di \vec{r} e \vec{p} . Questi costituiscono un tensore irriducibile $T^{(1)}$:

$$T_h^{(1)}|0, 0, 0\rangle \propto |1, 1, h\rangle$$

con la degenerazione dettata da h . Poiché dati $T_q^{(p)}$, $\tilde{T}_s^{(r)}$ vale la relazione:

$$\sum_{q+s=m} C_q^{p r l} T_q^{(p)} \tilde{T}_s^{(r)} = T_m^{(l)}$$

allora:

$$C_{k h n}^{1 1 l} T_h^{(1)} T_k^{(1)} = T_m^{(l)}$$

e la simmetria richiede $l=0, 2$. Segue:

$$T_h^{(1)} T_k^{(1)} |0, 0, 0\rangle \propto |2, (0, 2), m\rangle$$

per altri stati:

$$(a_x^\dagger - i a_y^\dagger) |0, 0, 0\rangle \propto ||n, n, -n\rangle$$

Esprimiamo ora \vec{L} e L_z in funzione di a e a^\dagger . Innanzitutto è noto che:

$$L_z = x p_y - y p_x$$

con $x = a_x + a_x^\dagger$ e $p_y = a_y - a_y^\dagger$. Ma allora L_z è bilineare in a e a^\dagger e dovendo commutare con n non può possedere termini tipo $a_x^\dagger a_y$ e $a_x a_y$, in quanto questi ultimi non commutano. Allora può essere scritto solo come $a_x^\dagger a_y - a_y^\dagger a_x$. L'assenza di prodotti $a_x a_y^\dagger$ è garantita invece dal fatto che L_z è espresso come un prodotto vettoriale. Siccome \vec{p} introduce un coefficiente $i\hbar$:

$$L_z \propto (a^\dagger \times a)_z$$

ovvero:

$$\boxed{\vec{L} \propto i\hbar(\vec{a}^\dagger \times \vec{a})}$$

In effetti, per calcolo diretto si ottiene:

$$L_z = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_x + a_x^\dagger) \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \frac{(a_y - a_y^\dagger)}{i} - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_y + a_y^\dagger) \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \frac{(a_x - a_x^\dagger)}{i}$$

e svolgendo i prodotti si ricava:

$$\frac{\hbar}{i} (a_x^\dagger a_y - a_y^\dagger a_x) = -i\hbar (a_x^\dagger a_y - a_y^\dagger a_x) = L_z$$

e n risulta dato da $a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + a_z^\dagger a_z = \vec{a}^\dagger \cdot \vec{a}$. La matrice costruita come:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} a_x^\dagger a_x & a_y^\dagger a_x & a_z^\dagger a_x \\ \hline a_x^\dagger a_y & a_y^\dagger a_y & a_z^\dagger a_y \\ \hline a_x^\dagger a_z & a_y^\dagger a_z & a_z^\dagger a_z \end{array} \right)$$

permette di costruire 9 operatori indipendenti: 3 per il momento angolare, 1 per l'energia. Le altre 5 componenti costituiscono invece un $T^{(2)}$ che commuta con n .

$$T_m^{(2)} ||2, 0, 0\rangle = ||2, 2, m\rangle$$

e esplicitamente:

$$\begin{aligned} T_{\pm 2}^{(2)} &= (a_x^\dagger \pm i a_y^\dagger)(a_x \pm i a_y) \\ T_1^{(2)} &= (a_x^\dagger + i a_y^\dagger) a_z + a_z^\dagger (a_x + i a_y) \\ T_0^{(2)} &= (a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + a_z^\dagger a_z) \end{aligned}$$

⁹In effetti, si può considerare $\vec{a} \equiv (\hat{a}_x; \hat{a}_y, \hat{a}_z)$ e $\vec{a}^\dagger \equiv (\hat{a}_x^\dagger; \hat{a}_y^\dagger, \hat{a}_z^\dagger)$

- Base Cilindrica

Per l'oscillatore armonico tridimensionale si può utilizzare anche una *base cilindrica*, definita come:

$$\begin{aligned} \| |n_+, n_0, n_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_+!n_0!n_-!}} \left\{ \left[\frac{a_x^\dagger + ia_y^\dagger}{\sqrt{2}} \right]^{n_+} (a_z^\dagger)^{n_0} \left[\frac{a_x^\dagger - ia_y^\dagger}{\sqrt{2}} \right]^{n_-} \right\} = \\ &= \left(T_1^{\dagger(1)} \right)^{n_+} \left(T_0^{\dagger(1)} \right)^{n_0} \left(T_{-1}^{\dagger(1)} \right)^{n_-} \end{aligned} \quad (4.2)$$

dove risulta:

$$\begin{aligned} n &= n_+ + n_0 + n_- \\ n_z &= n_0 \\ m &= n_+ + n_- \\ n_x + n_y &= n_+ + n_- \end{aligned} \quad (4.3)$$

Si possono ora introdurre gli operatori definiti come:

$$a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x \pm ia_y) \quad a_{\pm}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger \pm ia_y^\dagger)$$

e notando che sussistono le relazioni:

$$[a_+, a_+^\dagger] = [a_-, a_-^\dagger] = 1$$

si possono considerare gli operatori a_+, a_+^\dagger (e i corrispondenti a_-, a_-^\dagger) come gli operatori di distruzione/creazione di n_+ (o corrispondentemente di n_-). La (4.2) diventa allora:

$$\| |n_+, n_0, n_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_+!n_0!n_-!}} (a_+^\dagger)^{n_+} (a_z^\dagger)^{n_0} (a_-^\dagger)^{n_-} \| |0, 0, 0\rangle$$

Il passaggio fra le tre basi può essere effettuato tramite le (4.3) o con le seguenti:

$$n_{\pm} = \frac{n - n_z \pm m}{2} \quad n_0 = n_z$$

In tal modo si ricava:

$$\begin{aligned} \| |n_+, 0, 0\rangle &= \| |n_+, n_+, n_+\rangle \\ \| |0, 0, n_-\rangle &= \| |n_+, n_-, -n_-\rangle \\ \| |n, 0, 0\rangle &= \| |n, n, n\rangle \\ \| |0, 0, n\rangle &= \| |n, n, -n\rangle \end{aligned}$$

Si possono poi definire gli operatori $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$. L'espressione di questi operatori in termini degli operatori di creazione e distruzione è data da:

$$\begin{aligned} L_+ = L_x + iL_y &= \hbar[i(a_y a_z^\dagger - a_z a_y^\dagger) + i^2(a_z a_x^\dagger - a_x a_z^\dagger)] = \\ &= \hbar[a_z^\dagger(a_x + ia_y) - a_z(a_x^\dagger + ia_y^\dagger)] = \hbar\sqrt{2}(a_z^\dagger a_- + a_z a_+^\dagger) \end{aligned}$$

Per L_- si possono effettuare dei calcoli analoghi, ottenendo quindi:

$$\boxed{L_{\pm} = \hbar\sqrt{2}(\pm a_z^\dagger a_{\mp} + a_z a_{\pm}^\dagger)}$$

Il passaggio da coordinate cartesiane a polari non è immediato, in quanto mancano delle relazioni fra n e l, m . Può comunque tornare utile notare che con n pari vale $l = 0, 2, \dots, n-2, n$ mentre con l dispari vale $l = 1, 3, \dots, n-2, n$, ed in ogni caso $-n \leq m \leq n$. In alcuni casi si possono però ricavare gli autostati dell'energia. Questo è il caso di $l = m = 0$:

$$(a_x^{\dagger 2} + a_y^{\dagger 2} + a_z^{\dagger 2})^k |0, 0, 0\rangle = f(k) |2k, 0, 0\rangle$$

dove $f(k)$ è un fattore di normalizzazione da determinare.

Per gli stati con $n = l$ si può sfruttare il tensore $T_m^{(l)}(a^\dagger) = r^l Y_l^m(\theta, \varphi)$ sul quale si esegue la sostituzione:

$$\begin{aligned} r \sin \theta \cos \varphi &\rightarrow a_x^\dagger \\ r \sin \theta \sin \varphi &\rightarrow a_y^\dagger \\ r \cos \theta &\rightarrow a_z^\dagger \end{aligned}$$

in quanto, ad esempio, $r \sin \theta e^{\pm i\varphi} \rightarrow a_x^\dagger \pm i a_y^\dagger$. Allora si può costruire:

$$T_m^{(l)}(a^\dagger) |0, 0, 0\rangle = g(l) |l, l, m\rangle$$

con $g(l)$ ancora fattore di normalizzazione da determinare. Combinando le due, in generale si ottiene:

$$(a_x^{\dagger 2} + a_y^{\dagger 2} + a_z^{\dagger 2})^k T_m^{(l)}(a^\dagger) |0, 0, 0\rangle = h(l, k) |l + 2k, l, m\rangle$$

La dipendenza da k della $f(k)$ si può calcolare come segue:

$$[a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, a_x^{\dagger 2} + a_y^{\dagger 2} + a_z^{\dagger 2}] = 2[2(n_x + n_y + n_z) + 3] = 2(2n + 3)$$

per cui segue:

$$\langle n, n, m | [a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, a_x^{\dagger 2} + a_y^{\dagger 2} + a_z^{\dagger 2}] |n, n, m\rangle = 2(2n + 3)$$

Poiché non si può verificare $n < l$, si trova:

$$\langle n, n, m | [a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, a_x^{\dagger 2} + a_y^{\dagger 2} + a_z^{\dagger 2}] |n, n, m\rangle = |\langle n + 2, n, m | (a_x^{\dagger 2} + a_y^{\dagger 2} + a_z^{\dagger 2}) |n, n, m\rangle|^2$$

segue quindi:

$$(a_x^{\dagger 2} + a_y^{\dagger 2} + a_z^{\dagger 2}) |0, 0, 0\rangle = \sqrt{2(2n + 3)} |n + 2, n, m\rangle$$

da cui:

$$(a_x^{\dagger 2} + a_y^{\dagger 2} + a_z^{\dagger 2}) |0, 0, 0\rangle = 2^{k/2} |2k, 0, 0\rangle$$

4.2.1 Oscillatore Tridimensionale: un esercizio

Si consideri come primo esempio l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{r}^2 + \omega L_z + \varepsilon \frac{m}{2} \omega^2 z^2 + \eta \frac{\omega}{\hbar} \vec{L}^2$$

e se ne trovino gli autovalori.

Se $\varepsilon = 0$, allora l'Hamiltoniana $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{r}^2 + \omega L_z + \eta \frac{\omega}{\hbar} \vec{L}^2$ è diagonale nella base $||n, l, m\rangle$. I suoi autovalori sono in questo caso:

$$E = \hbar \omega \left(n + m + \frac{3}{2} \right) + \eta \hbar \omega l(l + 1)$$

ed essendo $n + m = 2n_+ + n_0$ l'energia non dipende da n_- ed è quindi degenera infinite volte. Poiché $n + m$ è intero, si ha ulteriore degenerazione se $[l(l + 1) - l'(l' + 1)]$ è un intero, perché essendo entrambi interi esistono combinazioni lineari che danno lo stesso valore di E .

Se invece $\eta = 0$, l'Hamiltoniana $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{r}^2 + \omega L_z + \varepsilon \frac{m}{2} \omega^2 z^2$ risulta diagonale nella base cilindrica $||n_+, n_0, n_-\rangle$. Gli autovalori in questo caso saranno:

$$E = \hbar \omega (2n_+ + 1) + \hbar \omega' \left(n_0 + \frac{1}{2} \right)$$

e di nuovo sono infinitamente degeneri se $\omega' = \omega\sqrt{1+\varepsilon}$. Infatti:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(1+\varepsilon)z^2 + \omega L_z$$

e poiché $n_x + n_y = n_+ + n_-$, $n_z = n_0$ e L_z va in m , gli autovalori sono:

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega(n_x + n_y + 1) + \hbar\omega' \left(n_z + \frac{1}{2} \right) + m\hbar\omega = \\ &= \hbar\omega(n_+ + n_- + 1) + \hbar\omega' \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega(n_+ + n_-) = \\ &= \hbar\omega(2n_+ + 1) + \hbar\omega' \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

con $\omega' = \omega\sqrt{1+\varepsilon}$. Questo è esattamente quanto trovato sopra. È evidente che c'è ulteriore degenerazione se:

$$\begin{aligned} \omega(2n_+ + 1) + \omega' \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) &= \omega(2n'_+ + 1) + \omega' \left(n'_0 + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(n_+ - n'_+)\omega &= (n'_0 - n_0)\omega' \Rightarrow \frac{\omega'}{\omega} = \frac{2k}{h} \quad k, h \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Sia ora il caso $\varepsilon = 3$. Si consideri il caso dell'Hamiltoniana imperturbata:

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + 4z^2) + \omega L_z \quad H' = \eta \frac{\omega}{\hbar} \vec{L}^2$$

Nella base cilindrica si ha:

$$H_0 ||n_+, n_0, n_-\rangle = 2\hbar\omega(n_+ + n_0 + 1) ||n_+, n_0, n_-\rangle$$

infatti:

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + 2m\omega^2z^2 + \omega L_z$$

poiché vale sempre $n_x + n_y = n_+ + n_-$, $n_z = n_0$ e $m = n_+ + n_-$ si ricava l'autovalore:

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega(n_x + n_y + 1) + 2\hbar\omega \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) + m\hbar\omega = \\ &= \hbar\omega(n_+ + n_- + 1) + 2\hbar\omega \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) + (n_+ + n_-)\hbar\omega = \\ &= \hbar\omega(2n_+ + 2n_0 + 2) \Rightarrow E = 2\hbar\omega(n_+ + n_0 + 1) \end{aligned}$$

che è quanto affermato sopra. Per calcolare la perturbazione conviene invece scrivere \vec{L}^2 in termini di a_+ e a_- :

$$\vec{L}^2 = \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+) + L_z^2$$

ed essendo:

$$L_{\pm} = \hbar\sqrt{2}(a_{\pm}^{\dagger}a_0 \pm a_0^{\dagger}a_{\mp}) \quad L_z = \hbar(n_+ - n_-) \quad n_{\pm} = a_{\pm}^{\dagger}a_{\pm}$$

si ricava:

$$\frac{1}{\hbar^2}L^2 = (n_+ - n_-)^2 + 2n_0(n_+ - n_- + 1) + n_+ - n_- + 2(a_+^{\dagger}a_-^{\dagger}a_0^2 + a_+a_-a_0^{\dagger 2})$$

gli ultimi due addendi sono fuori diagonale, per cui:

$$E^{(1)} = \eta\hbar\omega[m^2 + 2n_0(n_+ - n_- + 1) + n_+ - n_-]$$

Si prendano ora i due termini fuori diagonale non considerati prima:

$$H' ||n_+, n_0, n_-\rangle = E^{(1)} ||n_+, n_0, n_-\rangle + \\ + 2\sqrt{(n_+ + 1)(n_- + 1)n_0(n_0 - 1)} ||n_+ + 1, n_0 - 2, n_- + 1\rangle + \\ + 2\sqrt{n_+ n_- (n_0 + 1)(n_0 + 2)} ||n_+ - 1, n_0 + 2, n_- - 1\rangle$$

La correzione al II ordine è data quindi da:

$$E^{(2)} = \frac{\eta\omega^2\hbar^2}{2\hbar\omega} 4[(n_+ + 1)(n_- + 1)n_0(n_0 - 1) - n_+ n_- (n_0 + 1)(n_0 + 2)]$$

Sia ora $\eta = 1/2$. Si consideri l'Hamiltoniana imperturbata:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \omega L_z + \eta \frac{\omega}{\hbar} \vec{L}^2$$

con:

$$H' = \varepsilon \frac{m}{2} \omega^2 z^2$$

nella base polare si ha:

$$H_0 ||n, l, m\rangle = \hbar\omega \left[n + \frac{3}{2} + m + \frac{1}{2}l(l+1) \right] ||n, l, m\rangle$$

H' si esprime in termini di a_z , cioè $z = \sqrt{\hbar/2m\omega}(a_z + a_z^\dagger)$, ricavando:

$$H' = \varepsilon \frac{\hbar\omega}{4} (a_z^2 + a_z^{\dagger 2} + 2n_z + 1)$$

da cui:

$$H' = ||0, 0, 0\rangle = \varepsilon \frac{\hbar\omega}{4} (||0, 0, 0\rangle + \sqrt{2}||0, 2, 0\rangle)$$

e le correzioni sono:

$$E_{||0,0,0\rangle}^{(1)} = \varepsilon \frac{\hbar\omega}{4} \\ E_{||0,0,0\rangle}^{(2)} = -\varepsilon^2 \frac{\hbar^2\omega^2}{16} 2 \left(\frac{1/3}{E_{||2,0,0\rangle}^{(0)} - E_{||0,0,0\rangle}^{(0)}} + \frac{2/3}{E_{||2,2,0\rangle}^{(0)} - E_{||0,0,0\rangle}^{(0)}} \right)$$

4.2.2 Oscillatore Tridimensionale: un altro esercizio

Dato un oscillatore armonico tridimensionale, calcolare le modifiche al secondo ordine della perturbazione:

$$H' = \varepsilon \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{3/2} \hbar\omega z(x^2 + y^2)$$

Siccome sia z che $x^2 + y^2$ sono invarianti per rotazione intorno all'asse z , si può considerare la base cilindrica $||n_+, n_0, n_-\rangle$, in cui:

$$z = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_z^\dagger + a_z) \quad \begin{cases} x + iy = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} (a_- - a_+^\dagger) \\ x - iy = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} (a_-^\dagger - a_+) \end{cases} \Rightarrow (x^2 + y^2) = \frac{\hbar}{m\omega} (a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + 1 - a_+^\dagger a_-^\dagger - a_+ a_-)$$

dove si sono sfruttate le relazioni:

$$[a_-, a_-^\dagger] = 1 \rightarrow a_- a_-^\dagger = 1 + a_-^\dagger a_- \quad ; \quad a_+^\dagger a_+ = n_+ \quad ; \quad a_-^\dagger a_- = n_-$$

Segue allora:

$$\begin{aligned}
H' |||n_+, n_0, n_-\rangle &= \frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} (a_0^\dagger + a_0) (-a_+^\dagger a_-^\dagger - a_- a_+ + n_+ - n_- + 1) |||n_+, n_0, n_-\rangle = \\
&= \frac{\epsilon \hbar \omega}{\sqrt{2}} \left[-\sqrt{(n_+ + 1)(n_0 + 1)(n_- + 1)} |||n_+ + 1, n_0 + 1, n_- + 1\rangle + \right. \\
&\quad - \sqrt{n_+ n_- (n_0 + 1)} |||n_+ - 1, n_0 + 1, n_- - 1\rangle + \sqrt{n_0 + 1} (n_+ + n_- + 1) |||n_+, n_0 + 1, n_-\rangle + \\
&\quad - \sqrt{n_0 (n_+ + 1)(n_- + 1)} |||n_+ + 1, n_0 - 1, n_- + 1\rangle - \sqrt{n_+ n_- n_-} |||n_+ - 1, n_0 - 1, n_- - 1\rangle + \\
&\quad \left. + \sqrt{n_0} (n_+ + n_- + 1) |||n_+, n_0 + 1, n_-\rangle \right]
\end{aligned}$$

Poiché non ci sono elementi diagonali le correzioni al I ordine $E^{(1)} = 0$ sono nulle. Per le correzioni al II ordine, si nota che nei 6 stati precedenti ci sono solo variazioni di $\Delta n = \pm 3, \pm 1$. Questo significa che la correzione può essere scritta come:

$$\sum_{\text{Stati non ortogonali}} \left(\frac{H'_{\Delta n=3}}{-3\hbar\omega} + \frac{H'_{\Delta n=3}}{3\hbar\omega} + \frac{H'_{\Delta n=1}}{-\hbar\omega} + \frac{H'_{\Delta n=-1}}{\hbar\omega} \right)$$

dove i singoli termini hanno la forma:

$$\begin{aligned}
H'_{\Delta n=3} &= \langle n_+, n_0, n_- | H' | n_+ + 1, n_0 + 1, n_- + 1 \rangle \langle n_+ + 1, n_0 + 1, n_- + 1 | H' | n_+, n_0, n_- \rangle \\
H'_{\Delta n=-3} &= \langle n_+, n_0, n_- | H' | n_+ - 1, n_0 - 1, n_- - 1 \rangle \langle n_+ - 1, n_0 - 1, n_- - 1 | H' | n_+, n_0, n_- \rangle \\
H'_{\Delta n=1}^a &= \langle n_+, n_0, n_- | H' | n_+, n_0 + 1, n_- \rangle \langle n_+, n_0 + 1, n_- | H' | n_+, n_0, n_- \rangle \\
H'_{\Delta n=1}^b &= \langle n_+, n_0, n_- | H' | n_+ + 1, n_0 - 1, n_- + 1 \rangle \langle n_+ + 1, n_0 - 1, n_- + 1 | H' | n_+, n_0, n_- \rangle \\
H'_{\Delta n=-1}^a &= \langle n_+, n_0, n_- | H' | n_+, n_0 - 1, n_- \rangle \langle n_+, n_0 - 1, n_- | H' | n_+, n_0, n_- \rangle \\
H'_{\Delta n=-1}^b &= \langle n_+, n_0, n_- | H' | n_+ - 1, n_0 + 1, n_- - 1 \rangle \langle n_+ - 1, n_0 + 1, n_- - 1 | H' | n_+, n_0, n_- \rangle
\end{aligned}$$

Capitolo 5

Formulazione Covariante dell'Elettromagnetismo

5.1 Richiami di Relatività Speciale

Le trasformazioni di Galileo, valide a bassa velocità, sono nel caso di traslazione lungo l'asse z e rotazione di un angolo θ intorno allo stesso asse z :

$$\begin{cases} z' &= z + vt \\ x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ t &= t' \end{cases}$$

La teoria della relatività introduce le relazioni:

$$\begin{aligned} z' &= \gamma(z + vt) \\ ct' &= \gamma\left(ct + \frac{v}{c}z\right) \end{aligned}$$

dove $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta \equiv v/c$. L'invarianza per rotazioni fornisce:

$$\begin{aligned} z'^2 - c^2t'^2 &= \gamma^2(z^2 + 2vzt + v^2t^2) - \gamma^2\left(c^2t^2 + 2vzt + \frac{v^2}{c^2}z^2\right) = \\ &= z^2\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \gamma^2t^2(v^2 - c^2) = z^2\cancel{\gamma^2}\frac{1}{\cancel{\gamma^2}} + \cancel{\gamma^2}c^2t^2\frac{1}{\cancel{\gamma^2}} = \\ &= z^2 - c^2t^2 \end{aligned}$$

ovvero:

$$\boxed{\vec{r}'^2 - c^2t'^2 = \vec{r}^2 - c^2t^2}$$

Per rendere più esplicita la forma delle trasformazioni di Lorentz si può porre $\gamma \equiv \cosh \zeta$ e $\gamma^2 - 1 = \sinh \zeta$, ovvero interpretare la quantità γ come legata ad un angolo di rotazione immaginario ζ :

$$\begin{pmatrix} z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & \sinh \zeta \\ \sinh \zeta & \cosh \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ ct \end{pmatrix}$$

L'introduzione di un quadrivettore spaziotempo $x_\mu \equiv (\vec{r}, ct)$ permette di introdurre la quadrivelocità:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\left(t\sqrt{1 - \frac{d\vec{r}^2}{d(c^2t^2)}}\right)} = \frac{d\vec{r}}{d\left(t\sqrt{1 - \beta^2}\right)} = \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = \gamma \vec{v}$$

la cui quarta componente è data da γc :

$$\gamma \vec{v} \equiv \left(\gamma \frac{d\vec{r}}{dt}, \gamma c \right)$$

Si definisce allora *quantità di moto relativistica* $\vec{p} = m\vec{v} = m_0\gamma\vec{v}$, ovvero $p_\mu \equiv (m_0\gamma\vec{v}, m_0\gamma c)$. Sviluppando intorno allo zero la quarta componente del quadrimpulso (ovvero nel limite non relativistico):

$$m_0\gamma c = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 c \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + o(3) \right) \simeq m_0 c + \frac{1}{2c} m_0 v^2$$

ovvero, la quarta componente $m_0\gamma c^2$ è l'energia. La derivata rispetto al tempo del quadrimpulso deve quindi fornire la forza e il lavoro:

$$\frac{d}{dt} p_4 = m_0 c \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{2} m_0 c \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} 2\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = m_0 \gamma^3 \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c^2}$$

e:

$$\vec{p}^2 - p_4^2 = \gamma^2 m_0^2 (v^2 - c^2) = -m_0^2 c^2$$

5.2 Formulazione Covariante delle Equazioni di Maxwell

Si considerino le equazioni di Maxwell:¹

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = +4\pi \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = 4\pi \frac{\rho \vec{v}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Come è noto, il fatto che la divergenza del campo magnetico \vec{H} è identicamente nulla² induce a scrivere \vec{H} come il rotore di un campo:

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Infatti la divergenza di un rotore è identicamente nulla se sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Schwarz.³ Questa scrittura permette di dedurre:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Il campo $\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ è quindi irrotazionale, pertanto si può a sua volta scrivere come il gradiente di un campo scalare ϕ :

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} \phi \Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$$

pertanto i campi \vec{E} e \vec{H} soluzioni delle equazioni di Maxwell si possono scrivere tramite i potenziali \vec{A} e ϕ :

$$\boxed{\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi} \quad (5.1)$$

I potenziali \vec{A} e ϕ prendono rispettivamente il nome di *potenziale vettore* e *potenziale scalare*. Sostituendo queste espressioni nelle equazioni del flusso del campo elettrico e della generalizzazione della

¹In questo paragrafo per comodità di convenzione si useranno le lettere E e H per indicare il campo elettrico e magnetico.

²Si ricordi che questa scrittura implica che i monopoli magnetici non esistano.

³Vale forse la pena di ricordare che le condizioni per la validità del teorema di Schwarz sono che la funzione deve essere di classe $C^{(2)}$ e che sia definita su un insieme aperto e semplicemente connesso.

legge di Ampère (ovvero le altre due equazioni di Maxwell) si ricavano le equazioni corrispondenti per i potenziali:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \right) = -\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 4\pi \rho \quad (5.2a)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 4\pi \frac{\rho \vec{v}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \right) \quad (5.2b)$$

dove si è tenuto conto della relazione vettoriale $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$. Queste equazioni, note anche come *equazioni elettrodinamiche* descrivono la propagazione dei due potenziali vettore e scalare, tuttavia queste due equazioni risultano accoppiate.

Grazie al margine di arbitrarietà compreso nella definizione dei potenziali è possibile però disaccoppiarle. Questo margine di arbitrarietà deriva dal fatto che applicando determinate trasformazioni ai potenziali, le equazioni di evoluzione rimangano inalterate: in altri termini, applicando queste trasformazioni ai potenziali (dette *trasformazioni di Gauge*) le espressioni dei campi elettrico e magnetico non variano. Lo scopo finale che si ha in mente qui è quello di disaccoppiare le due equazioni e di renderle allo stesso tempo invarianti relativisticamente.

Innanzitutto si osservi che siccome il rotore di un campo gradiente è sempre nullo e denotando con Ψ un campo sufficientemente regolare, si ha che la trasformazione $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \Psi$ non altera il campo magnetico. Se si inserisce questa trasformazione nella seconda delle (5.1) si trova per il campo elettrico:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} \Psi) - \vec{\nabla} \phi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \vec{\nabla} \phi$$

e si vede che affinché anche il campo elettrico resti invariato il potenziale scalare deve far comparire un termine che compensi quello aggiuntivo derivante dal potenziale vettore, deve trasformare cioè come $\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$. Quindi le trasformazioni sui potenziali:

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \Psi \\ \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt} \end{cases}$$

rimangono invariate le equazioni di Maxwell. Avendo sempre in mente di disaccoppiare le equazioni elettrodinamiche (5.2a) e (5.2b) e metterle in una forma relativisticamente invariante, si può utilizzare la libertà di scelta fornita dalla Ψ per fare in modo che nella (5.2a) risulti

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0} \quad (5.3)$$

Questa particolare scelta prende il nome di *Gauge di Lorenz* ed è un invariante di Lorentz. In questo modo la prima equazione si disaccoppia e prende la forma di un'equazione delle onde:

$$-\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\nabla^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 4\pi \rho$$

Questa scelta risulta coerente, si vede infatti che sostituita nella (5.2b) permette anche a questa equazione di disaccoppiarsi e assumere la forma di un'equazione delle onde:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= 4\pi \frac{\rho \vec{v}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \right) \Rightarrow \\ -\nabla^2 \vec{A} + \cancel{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})} &= 4\pi \frac{\rho \vec{v}}{c} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \cancel{\vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi \right)} \end{aligned}$$

ovvero, in definitiva:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -4\pi \frac{\rho \vec{v}}{c}\end{aligned}$$

Queste due equazioni possono ormai essere riscritte direttamente in forma invariante utilizzando l'operatore D'alambertiano $\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ che, come è noto, è un invariante relativistico:

$$\begin{aligned}\square \phi &= -4\pi \rho \\ \square \vec{A} &= -4\pi \frac{\rho \vec{v}}{c}\end{aligned}$$

La gauge di Lorenz, che sfrutta la libertà insita nella definizione dei potenziali, permette quindi di esplicitare la covarianza delle equazioni dei potenziali.

Il fatto che il d'alambertiano sia un invariante porta ad introdurre in maniera naturale due quadrivettori:

$$\begin{aligned}A_\mu &\equiv (\vec{A}, \phi) && \text{quadrivettore potenziale} \\ j_\mu &\equiv (\rho \vec{v}/c, \rho) && \text{quadrivettore corrente}\end{aligned}$$

L'introduzione di un quadrivettore potenziale è del tutto lecita. Non deve sfuggire infatti che la gauge di Lorenz (5.3) è in effetti la quadridivergenza di questo quadrivettore, che risulta pertanto invariante. In altri termini, l'imposizione della gauge di Lorenz ai potenziali vettore e scalare oltre che disaccoppiare le equazioni dei potenziali, rendono questi le componenti di un quadrivettore invariante.

In termini di questi due quadrivettori, le equazioni dei potenziali assumono immediatamente una forma invariante relativistica estremamente compatta:

$$\boxed{\square A_\mu = -4\pi j_\mu}$$

Si consideri ora una generica rotazione:

$$\begin{cases} x' &= \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' &= z \end{cases}$$

Il gradiente definito come:

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

trasforma come:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}$$

e quindi il gradiente trasforma esattamente come un vettore. Considerando invece le trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} z' &= \gamma(z + vt) \\ ct' &= \gamma \left(ct + z \frac{v}{c} \right) \end{cases}$$

il gradiente trasforma come:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial z}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial(ct)}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial(ct)} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial(ct)} \right) \\ \frac{\partial}{\partial(ct')} &= \frac{\partial(ct)}{\partial(ct')} \frac{\partial}{\partial(ct)} + \frac{\partial z}{\partial(ct')} \frac{\partial}{\partial z} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial(ct)} - \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial(ct)} \right) \end{cases}$$

e quindi anche nel caso di trasformazioni di Lorentz il gradiente trasforma come un vettore. Si possono quindi introdurre i quadrivettori:

$$x_\mu \equiv (\vec{r}, ct) \quad \partial_\mu \equiv \left(\vec{\nabla}, -\frac{\partial}{\partial ct} \right)$$

e i rispettivi controvarianti:

$$x^\mu \equiv (\vec{r}, -ct) \quad \partial^\mu \equiv \left(\vec{\nabla}, \frac{\partial}{\partial ct} \right)$$

in questo modo $x_\mu x^\mu = r^2 - c^2 t^2$ è il quadrintervallo e $\partial_\mu \partial^\mu = \square$ è il d'alambertiano. Con questa notazione, la gauge di Lorenz si esprime come $\partial_\mu A^\mu = 0$.

L'introduzione di un formalismo relativisticamente invariante permette di definire un tensore elettromagnetico. Infatti vale:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} \Rightarrow H_z = \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \quad \text{ovvero} \quad H_k = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

per il campo elettrico vale una relazione analoga:

$$E_z = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \phi = \partial_4 A_3 - \partial_3 A_4$$

Si è portati quindi ad introdurre un **tensore elettromagnetico** definito come:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -E_x \\ -H_z & 0 & H_x & -E_y \\ H_y & -H_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}$$

e che trasforma evidentemente come:

$$F'_{\mu\nu}(x'_\lambda) = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma F_{\rho\sigma}(x_\lambda)$$

Si vedrà ora come trasformano alcune delle componenti di questo tensore a titolo di esempio.

$$H'_z = F'_{12} = \Lambda_1^\rho \Lambda_2^\sigma F_{\rho\sigma} = F_{12} = H_z$$

$$E'_z = F'_{43} = \Lambda_4^\rho \Lambda_3^\sigma F_{\rho\sigma} = \Lambda_4^4 \Lambda_3^3 F_{43} + \Lambda_3^4 \Lambda_4^3 F_{34} = \gamma^2 (F_{43} + \beta^2 F_{34}) = \gamma^2 (F_{43} - \beta^2 F_{34}) = F_{43} = E_z$$

$$H'_x = F'_{23} = \Lambda_2^\rho \Lambda_3^\sigma F_{\rho\sigma} = \Lambda_2^2 \Lambda_3^3 F_{23} + \Lambda_3^2 \Lambda_2^3 F_{32} = \Lambda_2^3 F_{23} + \Lambda_3^2 F_{24} = \gamma (H_x - \beta E_y)$$

e in maniera analoga per le altre componenti.

Si possono ora considerare le equazioni di Maxwell. Si considerino prima quelle senza sorgenti:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = \epsilon_{abc} \partial_a F_{bc} = 0$$

la quarta componente fornisce:

$$\partial_2 F_{34} + \partial_3 F_{42} + \partial_4 F_{23} = -\partial_y E_z + \partial_z E_y - \frac{1}{c} \partial_t H_x$$

ovvero proprio l'equazione $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} = 0$. Le equazioni senza sorgenti possono quindi scriversi in termini del tensore elettromagnetico:

$$\epsilon_{\lambda\mu\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0 \quad (5.4)$$

Per le altre equazioni risulta:

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = 4\pi \rho = \partial_1 F_{41} + \partial_2 F_{42} + \partial_3 F_{43}$$

e siccome il termine $\partial_4 F_{44} = 0$, questa equazione assume la forma $\partial^\lambda F_{4\lambda} = 4\pi j_4$. Generalizzando l'altra equazione si trova per la coppia di equazioni con le sorgenti:

$$\boxed{\partial^\lambda F_{\mu\lambda} = 4\pi j_\mu} \quad (5.5)$$

Si consideri ora la forza di Lorentz $\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H})$. Se si introduce la densità di carica ρ si può definire una "densità di forza di Lorentz" $\vec{\mathcal{F}} = \rho(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H})$. Si consideri la componente lungo z di questa densità $\vec{\mathcal{F}}$ in termini del tensore elettromagnetico e si tenga presente che vale $j_\mu = (\rho \frac{\vec{v}}{c}, \rho)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z &= \rho E_z + \frac{\rho}{c} (v_x H_y - v_y H_x) = \rho E_z + \frac{\rho}{c} v_x H_y - \frac{\rho}{c} v_y H_x = \\ &= \rho F_{43} + \frac{\rho v_x}{c} F_{31} - \frac{\rho v_y}{c} F_{23} = j_4 F_{43} + j_1 F_{31} - j_2 F_{23} = \\ &= j_4 F_{43} + j_1 F_{31} + j_2 F_{32} + \underbrace{j_3 F_{33}}_{=0} = j^\mu F_{3\mu} \end{aligned}$$

Lo stesso calcolo può applicarsi alle altre componenti della densità di forza, risulta quindi:

$$\mathcal{F}_i = j^\mu F_{i\mu}$$

Per la quarta componente si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4 &= j^\mu F_{4\mu} = j^1 F_{41} + j^2 F_{42} + j^3 F_{43} + \overset{0}{j^4 F_{44}} = \frac{\rho}{c} v_x E_x + \frac{\rho}{c} v_y E_y + \frac{\rho}{c} v_z E_z = \frac{\rho}{c} \vec{v} \cdot \vec{E} = \\ &= \rho \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{H}}{c} \right) \cdot \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{v}}{c} \end{aligned}$$

e cioè la densità di potenza. \mathcal{F}_λ costituisce quindi un quadrivettore le cui componenti sono la densità di forza di Lorentz e la densità di potenza:

$$\boxed{\mathcal{F}_\lambda = j^\mu F_{\lambda\mu}}$$

Deve allora essere possibile definire un "potenziale" a partire dal quadrivettore \mathcal{F}_λ tale che $\mathcal{F}_\lambda = -\partial^\mu T_{\lambda\mu}$. In base alla forma covariante (5.5) si può scrivere:

$$\mathcal{F}_\lambda = \underbrace{\frac{1}{4\pi} \partial^\rho F_\rho^\mu}_{=j^\mu} F_{\lambda\mu} = \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{4\pi} F_\rho^\mu \partial^\rho F_{\lambda\mu} = \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} \partial_\rho F_{\lambda\mu}$$

L'idea è di far uscire una divergenza totale manipolando opportunamente questa equazione in modo da poter trovare l'espressione esplicita del "potenziale" $T_{\lambda\mu}$. A questo fine, scambiando gli indici ρ e μ nel secondo pezzo di quest'ultima equazione:

$$-\frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} \partial_\rho F_{\lambda\mu} = -\frac{1}{4\pi} F^{\rho\mu} \partial_\mu F_{\lambda\rho}$$

e sommando:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\lambda &= \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} \partial_\rho F_{\lambda\mu} + \frac{1}{4\pi} F^{\rho\mu} \partial_\mu F_{\lambda\rho} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\rho} (\partial_\rho F_{\lambda\mu} - \partial_\mu F_{\lambda\rho}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\rho} (\partial_\rho F_{\lambda\mu} - \partial_\mu F_{\lambda\rho} - \partial_\lambda F_{\mu\rho} + \partial_\lambda F_{\mu\rho}) \end{aligned}$$

notando ora che $\partial_\rho F_{\lambda\mu} = -\partial_\rho F_{\mu\lambda}$ si ha:

$$\mathcal{F}_\lambda = \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\rho} \left(\underbrace{-\partial_\rho F_{\mu\lambda} - \partial_\mu F_{\lambda\rho} - \partial_\lambda F_{\mu\rho}}_{=\epsilon_{\lambda\mu\rho} \partial^\rho F^{\lambda\rho} \equiv 0} + \partial_\lambda F_{\mu\rho} \right)$$

per cui:

$$\mathcal{F}_\lambda = \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\rho} (\partial_\lambda F_{\mu\rho}) = \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{16\pi} \partial_\lambda (F^{\mu\rho} F_{\mu\rho})$$

rinominando ora gli indici muti μ in ν e ρ in μ nel primo termine e mandando l'indice muto μ in ν nel secondo termine, si ottiene:

$$\mathcal{F}_\lambda = \frac{1}{4\pi} \partial^\mu (F_\mu^\nu F_{\lambda\nu}) - \frac{1}{16\pi} \partial_\lambda (F^{\nu\rho} F_{\nu\rho})$$

notando infine che $\partial_\lambda = g_{\lambda\mu} \partial^\mu$ si ricava:

$$\mathcal{F}_\lambda = \frac{1}{4\pi} \partial^\mu (F_\mu^\nu F_{\lambda\nu}) - \frac{1}{16\pi} g_{\lambda\mu} \partial^\mu (F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}) = \partial^\mu \left(\frac{1}{4\pi} F_\mu^\nu F_{\lambda\nu} - \frac{1}{16\pi} g_{\lambda\mu} F^{\nu\rho} F_{\nu\rho} \right)$$

che permette di definire il "potenziale" come:

$$\boxed{\mathcal{F}_\lambda = -\partial^\mu T_{\lambda\mu} \quad T_{\lambda\mu} \equiv -\frac{1}{4\pi} F_\mu^\nu F_{\lambda\nu} + \frac{1}{16\pi} g_{\lambda\mu} F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}}$$

che prende il nome di *Tensore energia-impulso elettromagnetico*.

Questo tensore è simmetrico. Infatti, scambiando μ e λ nel secondo passaggio:

$$F_{\mu\nu} F_\lambda^\nu = -F_{\nu\mu} F_\lambda^\nu = F_\mu^\nu F_{\nu\lambda} = F_\lambda^\nu F_{\mu\nu}$$

Analizziamo ora le componenti principali di questo tensore.

$$T_{41} = -\frac{1}{4\pi} F_{4\nu} F_1^\nu = -\frac{1}{4\pi} F_{42} F_1^2 - \frac{1}{4\pi} F_{43} F_1^3 = -\frac{1}{4\pi} (E_y H_z - E_z H_y) = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})_x = S_x$$

in quanto $g_{41} = 0$.

$$T_{12} = -\frac{1}{4\pi} F_{1\nu} F_2^\nu = -\frac{1}{4\pi} F_{13} F_2^3 - \frac{1}{4\pi} F_{14} F_2^4 = -\frac{1}{4\pi} (+E_x E_y - H_y H_x) \equiv -\sigma_{xy}$$

per l'ultimo termine, tenendo conto del fatto che i termini diagonali sono nulli:

$$\begin{aligned} T_{44} &= -\frac{1}{4\pi} F_{4\nu} F_4^\nu + \frac{1}{16\pi} g_{44} F^{\rho\nu} F_{\rho\nu} = \frac{1}{4\pi} (F_{41} F_4^1 + F_{42} F_4^2 + F_{43} F_4^3) + \\ &\quad - \frac{1}{16\pi} g_{44} (F^{12} F_{12} + F^{13} F_{13} + F^{14} F_{14} + F^{21} F_{21} + F^{23} F_{23} + F^{24} F_{24} + \\ &\quad + F^{31} F_{31} + F^{32} F_{32} + F^{34} F_{34} + F^{41} F_{41} + F^{42} F_{42} + F^{43} F_{43}) \end{aligned}$$

ricordando la forma del tensore elettromagnetico, il termine si può riscrivere come:⁴

$$\begin{aligned} T_{44} &= -\frac{1}{4\pi} (-E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{16\pi} g_{44} (-2H_x^2 - 2H_y^2 - 2H_z^2 + 2E_x^2 + 2E_y^2 + 2E_z^2) = \\ &= \frac{1}{4\pi} E^2 - \frac{1}{16\pi} (-2H_x^2 - 2H_y^2 - 2H_z^2 + 2E_x^2 + 2E_y^2 + 2E_z^2) \\ &= \frac{1}{4\pi} E^2 + \frac{1}{8\pi} H^2 - \frac{1}{8\pi} E^2 = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) \end{aligned}$$

In definitiva il tensore energia-impulso espresso come matrice assume la forma:

$$T_{\lambda\nu} \equiv \begin{pmatrix} -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} & \frac{1}{c} S_x \\ -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} & \frac{1}{c} S_y \\ -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} & \frac{1}{c} S_z \\ \frac{1}{c} S_x & \frac{1}{c} S_y & \frac{1}{c} S_z & \mathcal{H} \end{pmatrix}$$

⁴Questo caso è abbastanza istruttivo delle trappole che possono annidarsi in un calcolo apparentemente semplice. Il termine di metrica g_{44} porta un segno meno (perché siamo in segnatura $+++$), nello stesso tempo le componenti "4" del tensore elettromagnetico (dunque le componenti del campo elettrico) cambiano di segno passando da componenti covarianti a controvarianti. Questo fornisce dei termini $-H_i^2$ per il campo magnetico ($-H_i \cdot H_i$) e $+E_i^2$ per il campo elettrico ($-E_i \cdot -E_i$).

dove:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{1}{4\pi} (E_i E_j + H_i H_j) - \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) \delta_{ij} = \text{tensore degli sforzi di Maxwell} \\ S_i &= \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \text{vettore di Poynting} \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) = \text{energia}\end{aligned}$$

Si consideri ora la quarta componente della densità di forza:

$$\mathcal{F}_4 = \partial^\lambda T_{4\lambda} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T_{44} - \partial^i T_{4i}$$

integrando si trova:

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \mathcal{F}_4 dV}_{\text{lavoro}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} T_{44} dV - \int_{\mathcal{V}} \partial^i T_{4i} dV \Rightarrow \frac{1}{c} \frac{dE_{\text{cariche}}}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{dE_{\text{e.m.}}}{dt} - \frac{1}{c} \int_{\Sigma} S_i d\sigma_i$$

Il lavoro rappresenta un'energia per unità di tempo (l'energia posseduta dalle cariche), mentre l'integrale di superficie rappresenta il flusso del vettore di Poynting, ovvero il flusso di energia uscente dal volume considerato. Ne consegue la legge di conservazione:

$$\boxed{\frac{d}{dt} (E_{\text{cariche}} + E_{\text{e.m.}}) = -\frac{d}{dt} E_{\text{uscita}}}$$

che esprime il fatto che se la somma dell'energia delle particelle e del campo elettromagnetico in un determinato volume non è costante, allora significa che esiste un flusso di energia uscente da questo volume.

Vediamo ora le componenti spaziali della densità di forza:

$$\mathcal{F}_i = -\partial^\lambda T_{i\lambda} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T_{i4} - \partial^j T_{ij}$$

e integrando:

$$\int_{\mathcal{V}} \mathcal{F}_i dV = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} T_{i4} dV - \int_{\mathcal{V}} \partial^j T_{ij} dV \Rightarrow \frac{d}{dt} P_{i\text{cariche}} = -\frac{d}{dt} P_{i\text{e.m.}} - \int_{\Sigma} T_{ij} \sigma_j$$

ovvero:

$$\boxed{\frac{d}{dt} (P_{i\text{cariche}} + P_{i\text{e.m.}}) = -\int_{\Sigma} T_{ij} \sigma_j}$$

Le due equazioni nel riquadro costituiscono i cosiddetti *teoremi di bilancio del tensore* $T_{\mu\nu}$.

5.3 Equazione di Klein-Gordon

Come è noto, l'equazione di Schrödinger è basata sul principio di corrispondenza:

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

Questa equazione non è relativisticamente invariante sotto trasformazioni di Lorentz, tuttavia il principio di corrispondenza risulta conservato nella formulazione invariante:

$$p_\mu \rightarrow -i\hbar \partial_\mu$$

L'equazione quantistica relativistica per una particella libera a spin 0⁽⁵⁾ si ottiene applicando il principio di corrispondenza alla relazione relativistica sull'energia $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad \rightarrow \quad \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2} \right] \psi(\vec{r}, t) = 0$$

o in modo più compatto, introducendo il d'alambertiano (**equazione di Klein-Gordon**):

$$\boxed{\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(\vec{r}, t) = 0} \quad (5.6)$$

Questa relazione implica, fra l'altro, che il quadrivettore impulso p_μ sia un vettore di lunghezza fissa pari a m^2c^2 :

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$$

Da notare che per $m = 0$ questa equazione si riduce all'equazione di Maxwell per i potenziali, rafforzando la conclusione che questa equazione rappresenta particelle a spin zero.

Il fatto che questa equazione sia del secondo ordine nel tempo implica che se $\psi(\vec{r}, t)$ è una soluzione, allora anche $\psi(\vec{r}, -t)$ è una soluzione, ovvero:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) &= E\psi(\vec{r}, t) \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, -t) &= -E\psi(\vec{r}, -t) \end{cases}$$

ovvero una particella reale potrebbe avere energia negativa. Non si può qui escludere semplicemente la soluzione negativa in quanto questa scelta non si mantiene necessariamente nel tempo.

D'altronde, risulta naturale definire qui l'Hamiltoniana del sistema come:

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

e quindi tramite il principio di corrispondenza:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4} \psi(\vec{r}, t)$$

La radice dell'operatore pone subito un problema di interpretazione. Se si effettua una espansione si ottiene una equazione che contiene tutte le potenze delle derivate e quindi una teoria non locale. Queste teorie sono difficili da trattare e inoltre non rappresenta una versione preferibile all'equazione di Schrödinger e presenta ancora tempo e spazio su due pianio diversi. È possibile però eliminare la radice quadrata dell'operatore prendendo il quadrato dell'energia. Questo modo di ottenere l'equazione di Klein-Gordon (5.6) rende ancora più evidente il fatto che si ritrovano soluzioni a energia negativa perché ora anche le:

$$H = -\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

sono soluzioni dell'equazione quadratica.

Da questa equazione deve essere possibile costruire una corrente di carica conservata perché vogliamo conservare l'interpretazione probabilistica della teoria quantistica non relativistica. Per fare questo, si procede usando la stessa tecnica come per l'equazione di Schrödinger. Consideriamo quindi l'equazione ottenuta moltiplicando la (5.6) a sinistra per $\psi^*(\vec{r}, t)$:

$$\psi^*(\vec{r}, t) \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(\vec{r}, t) = 0$$

⁵Si tratta di una particella a spin zero perché l'operatore di spin non interviene nella derivazione dell'equazione. Per la precisione, siccome si tratta dell'equazione che regge le particelle libere senza prendere in considerazione lo spin, è un'equazione che *non è specifica per particelle a spin 1/2*.

e la sua complessa coniugata:

$$\psi^*(\vec{r}, t) \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(\vec{r}, t) = 0$$

e sottraendo:

$$\psi^*(\vec{r}, t) \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^*(\vec{r}, t) = 0$$

ovvero:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \right] + \frac{\hbar}{2im} \vec{\nabla} \cdot [\psi^*(\nabla\psi) - \psi(\nabla\psi^*)] = 0$$

L'idea sarebbe di interpretare la quantità $\frac{i\hbar}{2mc^2} (\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^*)$ come una densità di probabilità $\varrho(\vec{r}, t)$, ma questa non risulta definita positiva. Seguendo il percorso storico, quindi, questa equazione sarà abbandonata. Si tratta tuttavia di un abbandono temporaneo perché si vedrà che è possibile recuperare questa equazione ed utilizzarla per descrivere particelle a spin zero.

5.4 Equazione di Dirac

Come si è visto, i problemi dell'equazione di Klein-Gordon (5.6) derivano dal fatto che è un'equazione quadratica nel momento p_μ . Dirac quindi cercò un'equazione relativisticamente invariante che fosse lineare nel momento e fornisse quindi una densità di probabilità definita positiva. Per fare questo, postulò che l'equazione dovesse avere una forma del tipo:

$$\left[\gamma_0 \frac{\partial}{\partial ct} + \gamma_x \partial_x + \gamma_y \partial_y + \gamma_z \partial_z - \frac{mc}{\hbar} \right] \psi(\vec{r}, t) = 0$$

dove le γ_μ sono i coefficienti da determinare. Poiché l'energia della particella è sempre data da $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, una soluzione dell'equazione di Dirac deve essere anche soluzione dell'equazione di Klein-Gordon. Questa condizione si può imporre applicando l'operatore coniugato:

$$\left[\gamma_0 \frac{\partial}{\partial ct} + \gamma_x \partial_x + \gamma_y \partial_y + \gamma_z \partial_z + \frac{mc}{\hbar} \right] \left[\gamma_0 \frac{\partial}{\partial ct} + \gamma_x \partial_x + \gamma_y \partial_y + \gamma_z \partial_z - \frac{mc}{\hbar} \right] \psi(\vec{r}, t) = 0$$

che porta alle condizioni:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \gamma_0 = -1 & \gamma_i^2 = 1 \\ \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 0 & \mu \neq \nu \end{array}}$$

Queste condizioni sono incompatibili se si considerano i γ_μ come degli scalari. Questo significa che i coefficienti devono essere delle matrici e le proprietà di anticommutazione suggeriscono che si può fare la scelta:

$$\gamma_x = \sigma_x \quad \gamma_y = \sigma_y \quad \gamma_z = \sigma_z$$

visto che risulta appunto $\sigma_i^2 = \mathbb{I}$. In questo caso si può scrivere allora:

$$\gamma_0 = a\mathbb{I} + b\sigma_x + c\sigma_y + d\sigma_z$$

poiché risulta $\gamma_i \gamma_0 + \gamma_0 \gamma_i = 0$ allora deve essere $a = b = c = d = 0$, il che è incompatibile. Ne consegue che la dimensione dello spazio scelto non è corretta al fine di verificare tutte le proprietà dei γ_μ .

Siccome uno spazio vettoriale di matrici $n \times n$ ha dimensione n^2 , si può ricavare la dimensione esaminando il massimo numero di matrici linearmente indipendenti che si possono formare con i γ_μ . Risulta che esistono solo 16 combinazioni indipendenti:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{I} & \text{Identità} \\ \gamma_0, \gamma_i & \gamma_\mu \\ \gamma_i \gamma_0, \gamma_i \gamma_j & \\ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \gamma_0 \gamma_i \gamma_j & \\ \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 & \equiv -i\gamma_5 \end{array}$$

Il fatto che queste siano le uniche combinazioni indipendenti significa che:

$$a\mathbb{I} + a_\mu\gamma_\mu + b_i\gamma_i\gamma_0 + c_{jk}\gamma_j\gamma_k + d\gamma_i\gamma_j\gamma_k + e_{jk}\gamma_0\gamma_j\gamma_k + f\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 0$$

il che implica che le γ_μ devono rispettare le condizioni:

$$\begin{aligned}\{\gamma_\mu, \gamma_0\} &= -2\delta_{\mu,0} \\ \{\gamma_i, \gamma_k\} &= 2\delta_{ik}\end{aligned}$$

o ancora più compattamente:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$$

Da queste condizioni si deduce che le matrici devono essere almeno 4×4 . La funzione d'onda $\psi(\vec{r}, t)$ è allora un cosiddetto *spinore* ad almeno 4 componenti. Un insieme di matrici che soddisfa queste condizioni è dato dalle matrici costruite a partire dalle matrici di Pauli 2×2 .

$$\gamma_0 = i \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = i \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } \vec{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

e

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Con questa scelta, l'equazione di Dirac descrive particelle a spin $1/2$. È possibile mostrarlo direttamente vedendo come si trasforma per rotazioni:

$$\begin{cases} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' &= z \\ t' &= t \end{cases}$$

Nei due sistemi di riferimento la particella è descritta dalle due equazioni:

$$\left[\gamma_\mu \partial^\mu - \frac{mc}{\hbar} \right] \psi_\beta(\vec{r}, t) = 0 \quad \left[\gamma'_\mu \partial'^\mu - \frac{mc}{\hbar} \right] \psi'_\alpha(\vec{r}', t') = 0$$

dove la matrice di rotazione della funzione d'onda:

$$\psi'_\alpha(\vec{r}', t') = A^\beta_\alpha \psi_\beta(\vec{r}, t)$$

si trova imponendo che le due equazioni siano identiche:⁶

$$\left[\gamma_\mu \partial^\mu - \frac{mc}{\hbar} \right] \psi_\beta(\vec{r}, t) = A^{-1} \left[\gamma'_\mu \partial'^\mu - \frac{mc}{\hbar} \right] A \psi'_\alpha(\vec{r}', t')$$

Siccome vale:

$$\begin{cases} \partial'_x &= \partial_x \cos \theta + \partial_y \sin \theta \\ \partial'_y &= -\partial_x \sin \theta + \partial_y \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \partial'_z &= \partial_z \\ \partial'_{ct} &= \partial_{ct} \end{cases}$$

risulta:

$$\begin{cases} A^{-1}(\gamma_\mu \cos \theta - \gamma_y \sin \theta)A &= \gamma_x \\ A^{-1}(\gamma_\mu \sin \theta + \gamma_y \cos \theta)A &= \gamma_y \end{cases} \quad \begin{cases} A^{-1}\gamma_z A &= \gamma_z \\ A^{-1}\gamma_0 A &= \gamma_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{ovvero } [A, \gamma_z] = 0 \\ \text{ovvero } [A, \gamma_0] = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Si considerino ora rotazioni infinitesime intorno all'asse z e si trascurino i termini superiori al primo:

$$A(\theta) \simeq 1 + \theta \Sigma_{xy} \quad A^{-1}(\theta) \simeq 1 - \theta \Sigma_{xy}$$

⁶Ovviamente, perché ruotando il sistema di riferimento la fisica non può cambiare.

dove Σ_{xy} è una matrice da determinarsi, $\cos\theta \simeq 1$ e $\sin\theta \simeq 0$. Sostituendo questa nelle ultime relazioni (5.7) si ricavano le relazioni:

$$\begin{aligned} [\Sigma_{xy}, \gamma_x] &= -\gamma_y & [\Sigma_{xy}, \gamma_z] &= 0 \\ [\Sigma_{xy}, \gamma_y] &= \gamma_x & [\Sigma_{xy}, \gamma_0] &= 0 \end{aligned}$$

da cui risulta che deve essere $\Sigma_{xy} \propto \gamma_x \gamma_y$. Più precisamente:

$$\Sigma_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_x \gamma_y = \frac{1}{4} (\gamma_x \gamma_y - \gamma_y \gamma_x) \equiv \frac{1}{4} [\gamma_x, \gamma_y]$$

Ora, l'operatore delle rotazioni infinitesime nel piano xy per le funzioni d'onda è dato da $1 + \frac{i}{\hbar} L_z \theta$, per cui nello spazio quadridimensionale in questione si può fare l'identificazione:

$$L_z = \frac{\hbar}{4i} [\gamma_x, \gamma_y]$$

e sostituendo le matrici γ_0 e γ_μ in termini delle matrici di Pauli:

$$L_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_z \mathbb{I}_4$$

dove con \mathbb{I}_4 si indica l'identità quadridimensionale. Questo permette di identificare l'operatore momento angolare lungo z L_z con il termine $\frac{\hbar}{2} \sigma_z$, ovvero proprio una componente di spin pari a $1/2$.

Per evidenziare il legame con l'energia si consideri il sistema solidale con la particella, ovvero quello in cui risulta costantemente $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, t)$. L'equazione diventa in questo caso:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = m_0 c^2 (-i\gamma_0) \psi(\vec{r}, t)$$

Al primo membro di questa equazione c'è evidentemente l'operatore energia. Siccome gli autovalori di $(-i\gamma_0)$ sono ± 1 , ne consegue che gli autovalori dell'energia sono $\pm m_0 c^2$ (doppi). Il valore doppio dell'autovalore $\pm m_0 c^2$ si interpreta come corrispondenti alle due proiezioni dello spin $\pm \hbar/2$.

In generale l'equazione stazionaria, cioè l'equazione agli autovalori per l'energia, si ottiene come segue:

$$\begin{aligned} i\hbar \gamma_0 \frac{\partial}{\partial ct} \psi(\vec{r}, t) &= -i\hbar (\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - \frac{mc}{\hbar}) \psi(\vec{r}, t) \rightarrow \\ \gamma_0 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\vec{p}, t) &= (c\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + imc^2) \psi(\vec{p}, t) \rightarrow \\ \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\vec{p}, t) &= (-c\gamma_0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - imc^2 \gamma_0) \psi(\vec{p}, t) \rightarrow \\ [c(-\gamma_0 \vec{\gamma}) \cdot \vec{p} + mc^2 (-i\gamma_0)] \psi(\vec{p}, E) &= E \psi(\vec{p}, E) \end{aligned}$$

In questa equazione stazionaria compaiono gli operatori $\alpha \equiv \gamma_0 \vec{\gamma}$ e $\beta \equiv -i\gamma_0$, che possono essere scritti nella forma:

$$\vec{\alpha} \equiv -\gamma_0 \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta \equiv i\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

L'equazione può allora essere scritta nella forma:

$$\boxed{[c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2] \psi(\vec{p}, E) = E \psi(\vec{p}, E)}$$

Consideriamo ora l'interazione con il campo magnetico. Per fare ciò, indichiamo esplicitamente le due componenti del bispinore:

$$\vec{\psi}(\vec{p}, E) = \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^+ \end{pmatrix}$$

Per componenti esplicite dei bispinori l'equazione di Dirac assume la forma:

$$(E - e\phi) \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^+ \end{pmatrix} = \left[-m_0 c^2 \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} - c\gamma_0 \vec{\gamma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right] \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^+ \end{pmatrix}$$

e separando le componenti:

$$\begin{cases} (E - e\phi)\chi^+ = m_0 c^2 \chi^+ + c\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \chi^- \\ (E - e\phi)\chi^- = -m_0 c^2 \chi^- + c\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \chi^+ \end{cases}$$

È possibile ricavare le componenti basse χ^- e sostituirle nell'equazione per le componenti alte:

$$\chi^- = \frac{c\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)}{(E - e\phi) + m_0 c^2} \chi^+$$

ottenendo:

$$(E - e\phi)\chi^+ = m_0 c^2 \chi^+ + \frac{c^2 \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)}{(E - e\phi) + m_0 c^2} \chi^+$$

dove $\vec{s} = \hbar/2\vec{\sigma}$ è l'operatore di spin. Dalla proprietà:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \sigma_a A_a \sigma_b B_b = (\delta_{ab} \mathbb{I} + i\epsilon_{abc} \sigma_c) A_a B_b = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

segue:

$$E\chi^+ = \left[e\phi + m_0 c^2 \chi^+ + \frac{c^2 \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + ic^2 \vec{\sigma} \cdot \left[\left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \times \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right]}{(E - e\phi) + m_0 c^2} \chi^+ \right]$$

Siccome vale:

$$\begin{aligned} \left[p_x - \frac{e}{c} A_x, p_y - \frac{e}{c} A_y \right] &= \left[\frac{\hbar}{i} \partial_x - \frac{e}{c} A_x, \frac{\hbar}{i} \partial_y - \frac{e}{c} A_y \right] = \\ &= -\frac{\hbar e}{i c} (\partial_x A_y - \partial_y A_x) = -\frac{\hbar e}{i c} H_z \end{aligned}$$

risulta:

$$E\chi^+ = \left[e\phi + m_0 c^2 + \frac{c^2 \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + iech\vec{\sigma} \cdot \vec{H}}{(E - e\phi) + m_0 c^2} \right] \chi^+$$

Nel limite non relativistico vale $E - e\phi \simeq m_0 c^2$, quindi:

$$E\chi^+ = \left[e\phi + m_0 c^2 + \frac{c^2 \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + iech\vec{\sigma} \cdot \vec{H}}{2m_0 c^2} \right] \chi^+$$

L'energia di interazione fra la carica e il campo elettromagnetico ha allora la forma:

$$e\phi + \frac{\left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2}{2m_0} - \frac{eh\vec{\sigma} \cdot \vec{H}}{m_0 c} = e\phi + \frac{\left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2}{2m_0} - \frac{e}{m_0 c} \vec{S} \cdot \vec{H}$$

compare quindi un termine di interazione con il campo magnetico \vec{H} che si può scrivere come $2\frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$, dove $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0}$ è il magnetone di Bohr. L'equazione di Dirac prevede quindi per il fattore giromagnetico il valore $g=2$.

Capitolo 6

Sistemi di Particelle Identiche

Si consideri un sistema di particelle identiche e siano dati i due eventi:

- Evento A: la particella 1 si trova nella posizione 1, la particella 2 nella posizione 2,
- Evento B: la particella 1 si trova nella posizione 2, la particella 2 nella posizione 1

In meccanica quantistica, non potendosi definire una traiettoria, non è possibile distinguere gli eventi A e B, per cui indicate le rispettive funzioni d'onda con $\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ e $\varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$ deve risultare:

$$|\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 = |\varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)|^2$$

da cui discende immediatamente che:

$$\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \pm \varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

cioè le due funzioni d'onda devono possedere proprietà definite di simmetria nello scambio delle due particelle.

*Le particelle che hanno il segno meno sono dette **fermioni**, mentre quelle che soddisfano il segno positivo sono dette **bosoni**.*

Ne consegue subito che due fermioni non possono trovarsi nello stesso posto contemporaneamente in quanto risulta:

$$\varphi(\vec{r}, \vec{r}) = -\varphi(\vec{r}, \vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \varphi(\vec{r}, \vec{r}) = 0$$

Più in generale quindi la funzione d'onda dei fermioni deve avere la forma:

$$\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \varphi_\alpha(\vec{r}_1)\varphi_\beta(\vec{r}_2) - \varphi_\alpha(\vec{r}_2)\varphi_\beta(\vec{r}_1) \quad (6.1)$$

Dove le φ_α e φ_β sono le funzioni d'onda dei singoli fermioni, supposti non interagenti.

6.1 Formalismo di Seconda Quantizzazione per Bosoni

Consideriamo N bosoni non interagenti e siano $\varphi_{\alpha_j}(\vec{r}_{p_j})$ le funzioni d'onda di singola particella, dove p_j indica il numero di particelle nello stato α_j . Se le particelle non fossero identiche la funzione totale si scriverebbe come:

$$\varphi_1(\vec{r}_1) \cdots \varphi_1(\vec{r}_{p_1}) \varphi_2(\vec{r}_{p_1+1}) \cdots \varphi_2(\vec{r}_{p_1+p_2}) \cdots \varphi_{\alpha_l}(\vec{r}_{p_1+\dots+p_l=N})$$

poiché però le particelle sono bosoni identici occorre prendere la somma su tutte le permutazioni non banali, ovvero permettere la permutazione delle prime p_1 particelle fra loro, delle seconde p_2 e così via. Queste permutazioni sono in numero di $N!/(p_1! \cdots p_l!)$ e quindi la funzione totale va anche moltiplicata per $\sqrt{p_1! \cdots p_l! / N!}$ per mantenere la normalizzazione. Si indichi con $|p_1 \dots p_l\rangle$ lo stato simmetrico ottenuto in questo modo.

Chiamiamo ora *operatore collettivo* un operatore definito come:

$$\hat{O} = \sum_{i=1}^N \hat{O}_i$$

dove il singolo operatore \hat{O}_i agisce sulla singola particella. Ricerchiamo quindi gli elementi di matrice di questo operatore \hat{O} . Se si suppone gli \hat{O}_i diagonali, allora:¹

$$\hat{O}_i \varphi_{\alpha_h}(\vec{r}_j) = \delta_{ij} o_h \varphi_{\alpha_h}(\vec{r}_j)$$

si ricava:

$$\hat{O} |p_1 \cdots p_l\rangle = \sum_{h=1}^N o_h p_h |p_1 \cdots p_l\rangle$$

Se questi operatori soddisfano invece la relazione:

$$\hat{O}_i \varphi_{\alpha_l}(\vec{r}_j) = \delta_{ij} \delta_{lr} \varphi_{\alpha_s}(\vec{r}_j)$$

questo agisce solo sulle funzioni d'onda relative alla particella $i = j$ e manda lo stato α_r ($l = r$) nello stato α_s con autovalore 1. In altre parole, questo operatore sposta r in s : se lo stato r manca esso non agisce, ma se è presente almeno una particella la manda nello stato s . Se inizialmente lo stato r ha p_r particelle e lo stato s ne ha p_s , dopo l'azione dell'operatore lo stato r si ritrova con $p_r - 1$ particelle e lo stato s con $p_s + 1$. Gli elementi di matrice devono allora essere del tipo $\delta_{ps} \delta_{qr}$, a cui va aggiunta la normalizzazione.

Prima dell'azione degli \hat{O}_i ci sono $N!/\sqrt{p_1! \cdots p_l!}$ addendi in $|p_1 \cdots p_l\rangle$, dopo il numero dei prodotti degli stati per singola particella è:

$$\frac{p_r N!}{p_1! \cdots p_l!}$$

con il fattore di normalizzazione $\sqrt{p_1! \cdots p_l! / N!}$. Per azione diretta si ricava il numero di termini:

$$\frac{N!}{p_1 \cdots (p_r - 1)! (p_s + 1)! \cdots p_l!}$$

con una normalizzazione data da $\sqrt{p_1 \cdots (p_r - 1)! (p_s + 1)! \cdots p_l! / N!}$. Per confronto:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{p_r N!}{p_1! \cdots p_l!} \sqrt{\frac{p_1! \cdots p_l!}{N!}}}{\frac{N!}{p_1 \cdots (p_r - 1)! (p_s + 1)! \cdots p_l!} \sqrt{\frac{p_1 \cdots (p_r - 1)! (p_s + 1)! \cdots p_l!}{N!}}} = \\ & = \frac{p_r (p_r - 1)! (p_s + 1)!}{p_r! p_s!} \sqrt{\frac{p_r!}{(p_r - 1)!} \frac{p_s!}{(p_s + 1)!}} = (p_s + 1) \sqrt{\frac{p_r}{p_s + 1}} \end{aligned}$$

da cui in definitiva:

$$\hat{O} |p_1 \cdots p_r p_s \cdots p_l\rangle = \sqrt{p_r (p_s + 1)} |p_1 \cdots (p_r - 1) (p_s + 1) \cdots p_l\rangle$$

L'analogia con gli operatori di creazione e distruzione suggerisce la definizione degli operatori:

$$\begin{aligned} \hat{a}_s^\dagger |p_1 \cdots p_s \cdots p_l\rangle &= \sqrt{p_s + 1} |p_1 \cdots (p_s + 1) \cdots p_l\rangle \\ \hat{a}_r |p_1 \cdots p_r \cdots p_l\rangle &= \sqrt{p_r - 1} |p_1 \cdots (p_r - 1) \cdots p_l\rangle \end{aligned}$$

che soddisfano la relazione $[\hat{a}_r, \hat{a}_s^\dagger] = \delta_{rs}$. L'operatore \hat{a}_s^\dagger crea una particella nello stato s e l'operatore \hat{a}_r distrugge una particella nello stato r , sono chiamati pertanto rispettivamente **operatore bosonico di creazione** e **operatore bosonico di distruzione**.

¹Per alleggerire la notazione indicheremo d'ora in poi \vec{r}_{p_j} semplicemente con \vec{r}_j

In termini di questi operatori risulta:

$$\hat{O} = o_{sr} \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_r$$

Se si considera il generico operatore \hat{O} con elementi di matrice \hat{O}_{pq} che soddisfa la $\hat{O}_{pq} = \delta_{ps} \delta_{qr} \hat{O}_{sr}$, ricordando la definizione di \hat{O}_i data sopra si può riscrivere come:

$$\hat{O} = \sum_{r,s=1}^l o_{sr} \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_r$$

Consideriamo infine gli operatori:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\vec{r}) &= \sum_{h=1}^n \varphi_h(\vec{r}) \hat{a}_h \\ \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') &= \sum_{k=1}^n \varphi_k^*(\vec{r}') \hat{a}_k^\dagger \end{aligned}$$

Questi operatori soddisfano le relazioni:

$$[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}(\vec{r})] = [\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}'), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = 0$$

e

$$[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = \sum_{h,k=1}^l \varphi_h(\vec{r}) \varphi_k^*(\vec{r}') [\hat{a}_h, \hat{a}_k^\dagger] = \sum_{h=1}^l \varphi_h(\vec{r}) \varphi_h^*(\vec{r}')$$

poiché le $\varphi_h(\vec{r})$ sono anche un sistema completo, vale la relazione:

$$[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Da queste relazioni si deduce che l'operatore $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')$ crea una particella nella posizione \vec{r}' e l'operatore $\hat{\Psi}(\vec{r})$ distrugge una particella nella posizione \vec{r} . Questi operatori sono chiamati **operatori di campo bosonico**.

6.2 Formalismo di Seconda Quantizzazione per Fermioni

Il formalismo appena visto per i bosoni si può estendere ai fermioni a patto di tenere presente che la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica. In termini di autofunzioni di singola particella si può quindi scrivere come un determinante di Slater:

$$\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \equiv |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(\vec{r}_1) & \cdots & \varphi_{\alpha_1}(\vec{r}_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{\alpha_N}(\vec{r}_1) & \cdots & \varphi_{\alpha_N}(\vec{r}_N) \end{vmatrix}$$

si noti che questa scrittura permette automaticamente di soddisfare il principio di Pauli, in quanto la forma (6.1) è automaticamente soddisfatta.

Si cerchino ora degli operatori \hat{O}_i analoghi agli operatori bosonici:

$$\hat{O}\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{l=1}^N \hat{O}_l \varphi_{\alpha_l}(\vec{r}_l) \quad \text{con} \quad \hat{O}_l \varphi_{\alpha_l}(\vec{r}_j) = \delta_{lj} \hat{O}_l \varphi_{\alpha_l}(\vec{r}_j)$$

Si possono ora presentare solo due casi: $p, l \in \{1, \dots, N\}$ oppure $p, l \notin \{1, \dots, N\}$. Se $l \notin \{1, \dots, N\}$, l'operatore non agisce e restituisce 0. Se $p \in \{1, \dots, N\}$ allora nel determinante compare una seconda riga α_p e di conseguenza si annulla.

Consideriamo il caso $l \in \{1, \dots, N\}$ e $p \notin \{1, \dots, N\}$. In questo caso l'operatore allora cambia la riga ma non preserva la normalizzazione. È importante specificare l'ordine degli stati e quindi sistemarli nell'ordine giusto, si devono quindi effettuare delle permutazioni di righe che cambiano segno al determinante. Cerchiamo quindi un operatore del tipo:

$$\hat{O} = \sum_{p=0}^N O_{lp} \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p$$

dove il segno corretto è nell'operatore \hat{b} . Indichiamo gli stati occupati con la notazione:

$$| \underbrace{0, \dots, 0}_{\text{non occupati}}, \underbrace{\uparrow, \uparrow, \dots, \uparrow}_{\substack{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_N \\ \text{occupati}}} \rangle$$

allora risulta:

$$b_p |0, \dots, 0, 1, \dots, \underbrace{\uparrow}_{p\text{-simo}}, \dots, 1\rangle = (-1)^{\sum_{\alpha_i < p} \alpha_i} |0, \dots, 0, 1, \dots, \underbrace{0}_{p\text{-simo}}, \dots, 1\rangle$$

dove con $\sum_{\alpha_i < p} \alpha_i$ si intende il numero di stati che precedono il p -simo. Più in generale se:

$$\begin{cases} \hat{b}_p = (-1)^{\sum_{\alpha_i < p} \alpha_i} n_p \\ \hat{b}_p^\dagger = (-1)^{\sum_{\alpha_i < p} \alpha_i} (1 - n_p) \end{cases}$$

allora \hat{b}_p e \hat{b}_p^\dagger apportano il segno giusto. Consideriamo infatti per semplicità il caso $l > p$.

$$\begin{aligned} \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_p |0, \dots, 0, 1, \dots, \underbrace{\uparrow}_p, \dots, \underbrace{\uparrow}_l, \dots, 0, \dots, 1\rangle &= \hat{b}_l^\dagger (-1)^{\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i} |0, \dots, 0, 1, \dots, \underbrace{0}_p, \dots, \underbrace{0}_l, \dots, 1\rangle = \\ &= (-1)^{\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i} (-1)^{[\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i + \sum_{i=p+1}^N \alpha_i]} |0, \dots, 0, 1, \dots, \underbrace{0}_p, \dots, \underbrace{1}_l, \dots, 1\rangle = \\ &= (-1)^{\sum_{i=p+1}^N \alpha_i} |0, \dots, 0, 1, \dots, \underbrace{0}_p, \dots, \underbrace{1}_l, \dots, 1\rangle \end{aligned}$$

e $\sum_{i=p+1}^N \alpha_i$ è proprio il numero di posti di cui si è scambiato lo stato. Come si vede, *l'operatore \hat{b}_l^\dagger crea un fermione nello stato l e l'operatore \hat{b}_p distrugge un fermione nello stato p e sono chiamati pertanto rispettivamente **operatore fermionico di creazione** e **operatore fermionico di distruzione**.*

Segue dalla definizione degli operatori \hat{b}_p :

$$\boxed{\hat{b}_l \hat{b}_p + \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_p^\dagger = 0 \quad \forall l, p} \quad (6.2)$$

infatti se $l > p$:

$$\hat{b}_l \hat{b}_p | \dots, \underbrace{\uparrow}_p, \dots, \underbrace{\uparrow}_l, \dots \rangle = \hat{b}_l (-1)^{\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i} | \dots, \underbrace{0}_p, \dots, \underbrace{\uparrow}_l, \dots \rangle = (-1)^{\sum_{i=p+1}^{l-1} \alpha_i} | \dots, \underbrace{0}_p, \dots, \underbrace{0}_l, \dots \rangle$$

quando si calcola $\hat{b}_p \hat{b}_l$, \hat{b}_l agisce su uno stato occupato in più ed ha quindi un segno meno in più che annulla la somma. In modo analogo si ricavano le regole:

$$\boxed{\begin{cases} \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_p + \hat{b}_p \hat{b}_l^\dagger = \delta_{lp} \\ \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_p^\dagger + \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_l^\dagger = 0 \quad \forall l, p \end{cases}}$$

In maniera analoga a quanto fatto per i bosoni, è possibile introdurre degli operatori definiti come:

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{h=1}^n \varphi_h(\vec{r}) \hat{b}_h$$

$$\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') = \sum_{k=1}^n \varphi_k^*(\vec{r}') \hat{b}_k^\dagger$$

Siccome secondo la (6.2) \hat{b} e \hat{b}^\dagger anticommutano risulta, ancora in analogia al formalismo bosonico:

$$[\Psi(\vec{r}), \Psi(\vec{r}')] = [\Psi^\dagger(\vec{r}'), \Psi^\dagger(\vec{r}')] = 0$$

e:²

$$[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = \sum_{h,k=1}^l \varphi_h(\vec{r}) \varphi_k^*(\vec{r}') [\hat{b}_h, \hat{b}_k^\dagger] = \sum_{h=1}^l \varphi_h(\vec{r}) \varphi_h^*(\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Si vede che l'operatore $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')$ crea un fermione nella posizione \vec{r}' e l'operatore $\hat{\Psi}(\vec{r})$ distrugge un fermione nella posizione \vec{r} e sono dunque chiamati **operatori di campo fermionico**.

Da notare che i campi associati non sono osservabili, in quanto se si introduce in questa trattazione anche il tempo risulta che questi operatori non commutano su distanze time-like.

²Si ricordi che le $\varphi(\vec{r})$ sono un sistema completo.

Capitolo 7

Elettrodinamica Quantistica

7.1 Quantizzazione del campo elettromagnetico

Si consideri il campo elettromagnetico A_μ in assenza di sorgenti. Esso soddisfa l'equazione $\square A_\mu = 0$. Data l'arbitrarietà della scelta dei potenziali, si consideri la gauge di Lorents in cui $\phi = 0$ e di conseguenza il campo elettromagnetico è descritto solo dal potenziale vettore \vec{A} che verifica le equazioni:

$$\square \vec{A} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (7.1)$$

Si osservi subito che:

$$\square e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + |\vec{k}|^2 \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

per cui se vale la relazione:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \vec{k}^2$$

una soluzione della prima delle (7.1) è proprio $\vec{e}(\vec{k})e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, dove $\vec{e}(\vec{k})$ è il versore indipendente dalla direzione di polarizzazione. Siccome poi vale anche:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e}(\vec{k})e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{e}(\vec{k}) \right] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{e}(\vec{k}) \left[\vec{\nabla} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] = 0 + \vec{e}(\vec{k}) \left[\vec{\nabla} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] = i e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{k} \cdot \vec{e}$$

si ha che questa relazione soddisfa anche la seconda delle (7.1) se vale $\vec{k} \cdot \vec{e} = 0$, ovvero se le onde elettromagnetiche sono trasverse. In uno spazio tridimensionale i vettori ortogonali ad uno dato sono solo due, per cui è più esplicito sostituire $\vec{e}_\alpha(\vec{k})$ a $\vec{e}(\vec{k})$, dove l'indice α può assumere solo due valori in corrispondenza delle due possibili polarizzazioni. Per questo, e siccome la prima delle (7.1) è lineare omogenea, la sua soluzione generale reale si scrive:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\alpha, \vec{k}} \left[a(\alpha, \vec{k}) \vec{e}_\alpha(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + a^*(\alpha, \vec{k}) \vec{e}_\alpha(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right]$$

dove $a(\alpha, \vec{k})$ sono dei coefficienti da determinare in base alle condizioni al contorno.¹ Il fattore $1/\sqrt{V}$ è un conveniente fattore di normalizzazione, essendo V il volume di spazio in cui si sta considerando il campo elettromagnetico. Introduciamo le variabili dinamiche:

$$a_{\alpha, \vec{k}} = a(\alpha, \vec{k}) e^{-i\omega t}$$

e le loro complesse coniugate. In questo modo, la soluzione generale di sopra si scrive in maniera più concisa:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\alpha, \vec{k}} \vec{e}_\alpha(\vec{k}) \left[a_{\alpha, \vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + a_{\alpha, \vec{k}}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right]$$

¹In generale, in maniera più corretta, al posto della sommatoria in \vec{k} si sarebbe dovuto utilizzare un integrale in $d\vec{k}$, in quanto \vec{k} può appunto assumere valori continui. Tuttavia, per semplicità formale si assumerà che possa assumere solo valori discreti che fra l'altro è il caso di una cavità risonante, come noto.

A partire dalle relazioni (5.1) per $\phi = 0$ si possono poi ricavare i campi elettrico e magnetico:

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\alpha, \vec{k}} \frac{\omega}{c} \vec{e}_\alpha(\vec{k}) \left[ia_{\alpha, \vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - ia_{\alpha, \vec{k}}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right] \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\alpha, \vec{k}} \vec{k} \times \vec{e}_\alpha(\vec{k}) \left[ia_{\alpha, \vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - ia_{\alpha, \vec{k}}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right]\end{aligned}\quad (7.2)$$

Si vuole ora calcolare esplicitamente l'Hamiltoniana del campo elettromagnetico che, come è noto, è data da:

$$H = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2) dV$$

e a questo fine occorre calcolare a partire dalle (7.2) \mathcal{E}^2 e \mathcal{H}^2 . Per fare questo si osservi che nelle (7.2) i campi sono scritti in termini di serie di Fourier complessa per la quale vale l'uguaglianza di Bessel² e quindi:

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}^2 &= \frac{1}{V} \sum_{\alpha, \vec{k}} 2 \frac{\omega^2}{c^2} a_{\alpha, \vec{k}} a_{\alpha, \vec{k}}^* = \frac{2}{V} \sum_{\alpha, \vec{k}} \frac{\omega^2}{c^2} \left[(\Re a_{\alpha, \vec{k}})^2 + (\Im a_{\alpha, \vec{k}})^2 \right] \\ \vec{\mathcal{H}}^2 &= \frac{1}{V} \sum_{\alpha, \vec{k}} 2 \vec{k}^2 a_{\alpha, \vec{k}} a_{\alpha, \vec{k}}^* = \frac{2}{V} \sum_{\alpha, \vec{k}} \vec{k}^2 \left[(\Re a_{\alpha, \vec{k}})^2 + (\Im a_{\alpha, \vec{k}})^2 \right]\end{aligned}$$

per cui, non dipendendo da $\vec{\mathcal{E}}^2$, $\vec{\mathcal{H}}^2$ e da \vec{r} , si ha immediatamente:³

$$H = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c^2} \sum_{\alpha, \vec{k}} \omega^2 \left[(\Re a_{\alpha, \vec{k}})^2 + (\Im a_{\alpha, \vec{k}})^2 \right]$$

Introducendo ora le variabili dinamiche:

$$\begin{aligned}Q_{\alpha, \vec{k}} &= a_{\alpha, \vec{k}} + a_{\alpha, \vec{k}}^* = 2 \Re a_{\alpha, \vec{k}} \\ P_{\alpha, \vec{k}} &= Q_{\alpha, \vec{k}}^* - Q_{\alpha, \vec{k}} = -i\omega (a_{\alpha, \vec{k}} + a_{\alpha, \vec{k}}^*) = 2\omega \Im a_{\alpha, \vec{k}}\end{aligned}\quad (7.3)$$

l'Hamiltoniana del campo magnetico si scrive come:

$$H = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c^2} \sum_{\alpha, \vec{k}} \left(P_{\alpha, \vec{k}}^2 + \omega^2 Q_{\alpha, \vec{k}}^2 \right)$$

Questa forma è probante: essa si interpreta dicendo che l'energia del campo elettromagnetico è data dalla somma delle energie di tanti oscillatori armonici di frequenze ω corrispondenti ai modi normali. A questo punto, la quantizzazione del campo elettromagnetico può effettuarsi introducendo le relazioni di commutazione:

$$\left[Q_{\alpha, \vec{k}}, P_{\alpha', \vec{k}'} \right] = i\hbar \delta_{\alpha, \alpha'} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

Da queste relazioni e dalle (7.3), che si possono anche scrivere nella forma:

$$\begin{aligned}a_{\alpha, \vec{k}} &= \frac{1}{2} \left(Q_{\alpha, \vec{k}} + iP_{\alpha, \vec{k}} \right) \\ a_{\alpha, \vec{k}}^\dagger &= \frac{1}{2} \left(Q_{\alpha, \vec{k}} - iP_{\alpha, \vec{k}} \right)\end{aligned}$$

si ricava l'altra relazione di commutazione:

$$\left[a_{\alpha, \vec{k}}, a_{\alpha', \vec{k}'}^\dagger \right] = \frac{\hbar}{2\omega} \delta_{\alpha, \alpha'} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (7.4)$$

²Il quadrato della somma di una serie di Fourier è uguale alla somma dei moduli quadri dei coefficienti dello sviluppo di Fourier stesso.

³Dalla relazione di dispersione $\omega^2 = \vec{k}^2 c^2$.

Quantisticamente, il campo elettromagnetico è quindi descritto dall'operatore:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha, \vec{k}} \left[a(\alpha, \vec{k}) \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + a^\dagger(\alpha, \vec{k}) \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right]$$

Si osservi che essendo:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= \hbar\omega \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ -i\hbar \vec{\nabla} \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= \hbar\vec{k} \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= -\hbar\omega \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ -i\hbar \vec{\nabla} \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= -\hbar\vec{k} \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{aligned}$$

il termine $\vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{\pm i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ si può interpretare come la funzione d'onda del quanto del campo elettromagnetico (fotone), corrispondente rispettivamente a energia $\pm\hbar\omega$ e impulso $\pm\hbar\vec{k}$. Ancora, dalla (7.4) si può considerare $a^\dagger(\alpha, \vec{k})$ e $a(\alpha, \vec{k})$ rispettivamente come l'operatore di creazione e distruzione di un fotone di energia $\hbar\omega$.⁴ Così il campo elettromagnetico è scritto come una somma di operatori di distruzione per la funzione d'onda del fotone $\hbar\omega$ più un operatore di distruzione del fotone $-\hbar\omega$.⁵ Analogamente a quanto fatto per l'energia, si può poi calcolare l'impulso $\vec{P} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{2} dV$ del campo elettromagnetico, si trova in maniera analoga:⁶

$$\vec{P} = \frac{1}{8\pi c^2} \sum_{\alpha, \vec{k}} \vec{k} \left(a_{\alpha, \vec{k}} a_{\alpha, \vec{k}}^\dagger + a_{\alpha, \vec{k}}^\dagger a_{\alpha, \vec{k}} \right)$$

Gli autovalori di energia e impulso sono allora dati da:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi c^2} \sum_{\alpha, \vec{k}} \hbar\omega \left(n_{\alpha, \vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \\ \vec{P} &= \frac{1}{4\pi c^2} \sum_{\alpha, \vec{k}} \hbar\vec{k} \left(n_{\alpha, \vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Il termine $n_{\alpha, \vec{k}}$, come noto, è un numero intero che in questo caso andrà interpretato come numero di fotoni di energia $\hbar\omega$, impulso $\hbar\vec{k}$ e polarizzazione α . Si osservi che l'energia in assenza di fotoni anziché essere nulla è infinita, questa incongruenza si può risolvere eliminando (rigorosamente) il termine $1/2$. Questo inconveniente invece non si ha per l'impulso, in quanto se un fotone può avere impulso $\hbar\vec{k}$, ha anche $-\hbar\vec{k}$ e così per $n_{\alpha, \vec{k}}$ si ha $\vec{P} = 0$.

7.2 Quantizzazione del campo elettronico

Dopo aver effettuato la quantizzazione del campo elettromagnetico in assenza di cariche, si vuole ora considerare la quantizzazione del campo delle cariche, ovvero della carica elementare (elettrone) in assenza del campo elettromagnetico, riservando al §7.3 il caso più complesso della loro interazione.

Come si è visto, la teoria di Dirac di prima quantizzazione prevede per l'elettrone libero anche stati di energia negativa, la cui interpretazione non era allora chiara. Tuttavia, si è appena visto che stati di energia negativa intervengono nella scrittura esplicita del campo elettromagnetico quantizzato. In

⁴O, inversamente, un operatore rispettivamente di distruzione e creazione di un fotone di energia $-\hbar\omega$.

⁵Naturalmente, si intende che gli operatori $a_{\alpha, \vec{k}}$ e $a_{\alpha, \vec{k}}^\dagger$ non agiscono sulle funzioni d'onda per le quali sono moltiplicati a sinistra.

⁶Vale la relazione:

$$\vec{P} = \frac{k}{c} \hat{k}$$

analogia a quest'ultimo, Dirac propose di scrivere il campo quantizzato dell'elettrone $\psi(\vec{r}, t)$ nella seguente forma:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{\beta, \vec{p}} \left[u(\vec{p}, \beta) e^{i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} b_{e^-}(\vec{p}, \beta) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} + u(-\vec{p}, \beta) e^{-i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} b_{e^+}^\dagger(\vec{p}, \beta) e^{i\frac{E}{\hbar}t} \right] \quad (7.5)$$

dove, al posto del vettore d'onda \vec{k} c'è l'impulso della particella \vec{p} e alla polarizzazione α è stato sostituito l'indice β che individua i due possibili stati di spin della particella, inoltre, nel caso considerato, il campo $\psi(\vec{r}, t)$ è in generale complesso e non necessariamente reale. Questo campo quantizzato associato ai fermioni prende il nome di *campo di Dirac*.

Nel primo addendo della (7.5) compare la funzione d'onda di una particella libera avente energia positiva (l'elettrone) moltiplicata per un operatore di distruzione di un elettrone. Poiché distruggendo un elettrone la carica aumenta di una unità, il primo addendo incrementa quindi di 1 la carica ($\Delta q = +1$). Prima di procedere avanti nell'interpretazione, si osservi che dovendo essere conservata la carica il campo $\psi(\vec{r}, t)$ deve avere proprietà definite rispetto alla carica, per esempio può avere $\Delta q = 0$ o $\Delta q = \pm 1$ ⁽⁷⁾. In altre parole non può essere costituito, ad esempio, da una somma di termini che hanno ciascuno un Δq diverso. *Così, poiché il primo addendo della (7.5) ha $\Delta q = +1$, tale deve essere anche il secondo addendo. Di conseguenza, l'operatore di creazione compreso qui non può creare un elettrone perché in questo modo la carica diminuirebbe di 1: esso deve quindi creare una particella di carica positiva.* Questa ipotesi è confortata dal fatto che $b_{e^+}^\dagger(\vec{p}, \beta)$ è moltiplicato per una funzione d'onda di una particella libera corrispondente a $E < 0$ se la carica è negativa, ovvero con $E > 0$ se la carica è positiva.

La teoria di Dirac di seconda quantizzazione prevede quindi l'esistenza di un elettrone positivo (positrone).

7.2.1 Perturbazioni dipendenti dal tempo

Si consideri un sistema descritto, all'istante iniziale $t = 0$ dall'Hamiltoniana non esplicitamente dipendente dal tempo H_0 e di cui sia noto lo spettro $H_0|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$. Se inizialmente il sistema è in uno stato $|\psi^0\rangle = \sum_n c_n|\psi_n\rangle$, è già noto che agli istanti successivi sarà nello stato $|\psi^0(t)\rangle = \sum_n e^{-E_n/\hbar t} c_n|\psi_n\rangle$, con i c_n non dipendenti dal tempo.

Si supponga ora però che da $t = 0$ in poi sul sistema agisca una perturbazione $V(t)$ per un periodo di tempo limitato, ossia il sistema abbia Hamiltoniana $H = H_0 + V(t)$. Lo stato $|\psi(t)\rangle$ è allora soluzione dell'equazione:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (H_0 + V(t)) |\psi(t)\rangle \quad (7.6)$$

Poiché $\{|\psi_m\rangle\}$ è un sistema completo si può scrivere:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |\psi_n(t)\rangle \quad (7.7)$$

per cui il problema è ricondotto alla ricerca dei coefficienti $c_n(t)$. Sostituendo la (7.7) nella (7.6) si ha:

$$i\hbar \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\dot{c}_n(t) - i\frac{E_n}{\hbar} c_n(t) \right] e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |\psi_n(t)\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \cancel{c_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}} |\psi(t)\rangle + \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(t) c_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |\psi(t)\rangle$$

per cui i $c_n(t)$ soddisfano la relazione:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \dot{c}_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |\psi_n(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(t) c_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |\psi_n(t)\rangle \quad (7.8)$$

⁷E in questo caso la carica viene conservata se si moltiplica $\psi(\vec{r}, t)$ per un campo con $\Delta q = \pm 1$ quale ad esempio ψ^\dagger .

e proiettando sullo stato $\langle \psi_m(t) |$:

$$\dot{c}_n(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_{m=0}^{+\infty} V_{mn}(t) c_m(t) e^{i \frac{E_m - E_n}{\hbar} t} \quad (7.9)$$

dove naturalmente $V_{mn}(t)$ è l'elemento di matrice $\langle \psi_m(t) | V(t) | \psi_n(t) \rangle$.

Si supponga ora di voler calcolare la probabilità di transizione dallo stato iniziale $|\psi_p(t)\rangle$ ad uno stato finale $|\psi_a(t)\rangle$, questa è data proprio da $|c_a(t)|^2$, ricavabile direttamente dall'ultima relazione. Poiché questa è generalmente difficile da risolvere, si cerca in genere una soluzione approssimata per $c_q(t)$ supponendo che la perturbazione $V(t)$ sia di piccola entità e che agisca per un tempo breve. Se all'istante iniziale il sistema è nello stato $\psi_p(t)$ allora deve valere $c_n(0) = \delta_{np}$, tuttavia se il potenziale perturbativo $V(t)$ soddisfa le condizioni appena citate si può assumere che per tutta la durata della perturbazione sia $c_n(t) \simeq \delta_{np}$, per cui la (7.9) diventa:

$$c_q(t) \simeq \frac{1}{i\hbar} \int_0^T V_{qp}(t) e^{i \frac{E_p - E_a}{\hbar} t} dt$$

7.2.2 Operatore di evoluzione temporale

È già noto che se un sistema è descritto da una Hamiltoniana H_0 indipendente dal tempo, l'operatore evoluzione temporale è $e^{-i \frac{H_0}{\hbar} t}$, cioè che vale:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i \frac{H_0}{\hbar} t} |\psi(0)\rangle$$

Si supponga ora che l'Hamiltoniana del sistema sia $H = H_0 + V(t)$. In questo caso, la funzione d'onda $\psi(t)$ si può scrivere nella forma (7.7) con i coefficienti $c_n(t)$ ricavati a partire dalla relazione (7.8). Si considerino ora le espressioni:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t) |\psi_n(t)\rangle$$

$$\dot{f}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dot{c}_n(t) |\psi_n(t)\rangle$$

da cui:

$$e^{-i \frac{H_0}{\hbar} t} f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} |\psi_n(t)\rangle = |\psi(t)\rangle$$

$$e^{-i \frac{H_0}{\hbar} t} \dot{f}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dot{c}_n(t) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} |\psi_n(t)\rangle$$

Con queste notazioni, la (7.8) diventa formalmente:

$$e^{-i \frac{H_0}{\hbar} t} \dot{f}(t) = \frac{1}{i\hbar} V(t) e^{-i \frac{H_0}{\hbar} t} f(t)$$

o in maniera equivalente:

$$\dot{f}(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[e^{i \frac{H_0}{\hbar} t} V(t) e^{-i \frac{H_0}{\hbar} t} \right] f(t)$$

ovvero, formalmente:

$$f(t) = f(0) e^{\frac{1}{i\hbar} \int_0^T e^{i \frac{H_0}{\hbar} t} V(t) e^{-i \frac{H_0}{\hbar} t} dt}$$

da cui si ricava che l'operatore di evoluzione temporale nel caso considerato è dato da:⁸

$$e^{\frac{1}{i\hbar} \int_0^T e^{i\frac{H_0}{\hbar}t} V(t) e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} dt}$$

In linea generale, si possono estendere i limiti di integrazione fra $-\infty$ e $+\infty$, visto che la perturbazione si assume limitata nel tempo.

7.2.3 Rappresentazione di Schrödinger, Heisemberg e Dirac

È noto che in uno stato un operatore \hat{A} ha un valore medio:

$$\overline{A(t)} = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle \quad (7.10a)$$

$$\overline{A(t)} = \langle \psi(0) | e^{i\frac{H}{\hbar}t} \hat{A} e^{-i\frac{H}{\hbar}t} | \psi(0) \rangle \quad (7.10b)$$

La rappresentazione (7.10a) è detta *rappresentazione di Schrödinger*, in essa si assume che il valore medio di \hat{A} cambi nel tempo perché è lo stato $|\psi(t)\rangle$ che varia nel tempo. Invece, nella rappresentazione (7.10b), detta *rappresentazione di Heisemberg*, si assume che il valore medio di \hat{A} cambia perché è l'operatore stesso che varia nel tempo mentre la funzione d'onda resta quella iniziale.

Una ulteriore rappresentazione, che risulterà utile nel seguito, è dovuta a Dirac (detta appunto *rappresentazione di Dirac*): in essa si considera l'Hamiltoniana H come somma di quella libera H_0 e di una Hamiltoniana di interazione H' , ovvero $H = H_0 + H'$. In questo caso risulta:

$$\overline{A(t)} = \langle \psi_0(t) | e^{i\frac{H_0}{\hbar}t} \hat{A} e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} | \psi_0(t) \rangle \quad (7.11)$$

dove $\psi_0(t) \rightarrow \psi(0)$ se $H' = 0$.

Nel seguito, per ragioni di convenienza, la componente temporale di un quadrivettore sarà indicata con l'indice 0. In questo modo risulta $x_\mu = (ct, \vec{r})$ e sarà adottata la segnatura metrica $+ - - -$.

7.3 Quantizzazione dell'interazione fotone-elettrone

Classicamente, l'interazione di un sistema di cariche con quadricorrente $j_\mu = (e, \rho\vec{v}/c)$ con un campo elettromagnetico di potenziale vettore $a_\mu = (\phi, \vec{A})$ è descritta da:

$$H'(t) = e \int_0^{+\infty} j_\mu(\vec{r}, t) A^\mu(\vec{r}, t) d\vec{r}$$

In elettrodinamica quantistica (d'ora in poi, QED) questa forma viene mantenuta, con la riserva però di considerare la quantità in questa formula come degli operatori la cui forma verrà ricavata qui di seguito. Innanzitutto si osservi che, dato il campo di Dirac ψ (o qualunque altro campo), le seguenti quantità hanno proprietà definite sotto trasformazioni di Lorentz:

Combinazione	Tipo di Oggetto
$\psi^\dagger \gamma_0 \psi$	Scalare
$\psi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \psi$	Vettore
$\psi^\dagger \gamma_0 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \psi$	Quadritensore antisimmetrico del II° ordine
$\psi^\dagger \gamma_0 \gamma_5 \psi$	Pseudovettore
$\psi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_5 \psi$	Quadrivettore assiale

⁸Ovviamente, questa relazione si riferisce alla sola perturbazione, per la funzione d'onda soluzione dell'equazione di Schrödinger con $H = H_0 + V(t)$ si ha:

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^T e^{i\frac{H_0}{\hbar}t} V(t) e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} dt$$

dove con γ_5 si indica, secondo la convenzione stabilita, il prodotto delle matrici di Dirac $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Si userà nel seguito anche la notazione $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma_0$. Detto quindi ψ questo campo di Dirac, è naturale costruire il vettore corrente:

$$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

mediante il quale l'interazione fra fermione e campo elettromagnetico si scrive:

$$H'(t) = e \int_0^{+\infty} \bar{\psi}(\vec{r}, t)\gamma_\mu\psi(\vec{r}, t)A^\mu(\vec{r}, t)d\vec{r} \quad (7.12)$$

cioè l'ampiezza di probabilità del dato fenomeno è il modulo quadro dell'elemento di matrice fra lo stato finale e lo stato iniziale dell'operatore:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \int H'(t)dt} = e^{-i\frac{e}{\hbar c} \int \bar{\psi}(\vec{r}, t)\gamma_\mu\psi(\vec{r}, t)A^\mu(\vec{r}, t)d^4x_\mu} \quad (7.13)$$

I campi coinvolti in questa espressione sono:

$$\begin{aligned} A_\mu &= \sum_{\alpha, k} \left[e^\mu(\alpha, k)a_{\alpha, k}e^{-ik_\mu x^\mu} + e^{*\mu}(\alpha, k)a_{\alpha, k}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right] \\ \psi &= \sum_{\beta, p} \left[u(\beta, p)b_{\beta, -p}e^{-i\frac{p_\mu}{\hbar}x^\mu} + v(\beta, p)b_{\beta, p}e^{i\frac{p_\mu}{\hbar}x^\mu} \right] \\ \bar{\psi} &= \sum_{\beta, p} \left[\bar{u}(\beta, p)b_{\beta, -p}^\dagger e^{i\frac{p_\mu}{\hbar}x^\mu} + \bar{v}(\beta, -p)b_{\beta, p}^\dagger e^{-i\frac{p_\mu}{\hbar}x^\mu} \right] \end{aligned}$$

In questo modo, dalla (7.12) si vede che i processi elementari che possono avvenire in un punto dato sono otto, e precisamente:

1. distruzione di un fotone e di un e^- , creazione di un altro e^- ($ab_-b_-^\dagger$),
2. distruzione di un fotone, di un e^- e di un e^+ (ab_-b_+),
3. distruzione di un fotone, creazione di un e^- e di un e^+ ($ab_-^\dagger b_+^\dagger$),
4. distruzione di un fotone e di un e^+ e creazione di un altro e^+ ($ab_+b_+^\dagger$),
5. distruzione di un e^- , creazione di un altro e^- e di un fotone ($a^\dagger b_-b_-^\dagger$),
6. distruzione di un e^- e di un e^+ , creazione di un fotone ($a^\dagger b_-b_+$),
7. creazione di un fotone, un e^+ e di un e^- ($a^\dagger b_+^\dagger b_-^\dagger$),
8. distruzione di un e^+ , creazione di un altro e^+ e di un fotone ($a^\dagger b_+^\dagger b_+$).

la cui interazione è descritta proprio dalla (7.12) in cui si sono sostituite le espressioni dei campi date sopra.

Nel seguito si studieranno i processi di interazione cariche-campo elettromagnetico a diversi ordini della carica elettrica e , ottenuti sviluppando in serie la forma (7.13):

$$e^{-i\frac{e}{\hbar c} \int \bar{\psi}(\vec{r}, t)\gamma_\mu\psi(\vec{r}, t)A^\mu(\vec{r}, t)d^4x_\mu} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{n!} \left(\frac{-i}{\hbar c} \right)^n \left| \int \bar{\psi}(\vec{r}, t)\gamma_\mu\psi(\vec{r}, t)A^\mu(\vec{r}, t)d^4x_\mu \right|^n$$

7.3.1 Interazione cariche-campo elettromagnetico al I ordine in e

Al primo ordine in e , l'operatore (7.13) diventa:

$$-i\frac{e}{\hbar c} \int \bar{\psi}(\vec{r}, t)\gamma_\mu\psi(\vec{r}, t)A^\mu(\vec{r}, t)d^4x_\mu$$

Dei fenomeni possibili, si consideri ad esempio il fenomeno 5): un elettrone di quadrimpulso p_1 viene distrutto e al suo posto viene creato un elettrone di quadrimpulso p_2 e un fotone k . In questo caso si ha:

$$\begin{aligned} & \int \bar{\psi}(\vec{r}, t) \gamma_\mu \psi(\vec{r}, t) A^\mu(\vec{r}, t) d^4 x_\mu = \\ & = \int \bar{u}(\beta_2, p_2) b_{\beta_2, -p_2}^\dagger e^{i \frac{p_2 \mu}{\hbar} x^\mu} \gamma_\mu u(\beta_1, p_1) b_{\beta_1, -p_1}^\dagger e^{i \frac{p_1 \mu}{\hbar} x^\mu} e^\mu(\alpha, k) a_{\alpha, k}^\dagger e^{i k_\mu x^\mu} d^4 x_\mu = \\ & = \bar{u}(\beta_2, p_2) \gamma_\mu u(\beta_1, p_1) e^\mu(\alpha, k) \int e^{i \frac{(p_2 \mu - p_1 \mu + \hbar k_\mu) x^\mu}{\hbar}} d^4 x_\mu b_{\beta_2, -p_2}^\dagger b_{\beta_1, -p_1}^\dagger a_{\alpha, k}^\dagger = \\ & = \bar{u}(\beta_2, p_2) \gamma_\mu u(\beta_1, p_1) e^\mu(\alpha, k) (2\pi)^4 \delta^4 \left(\frac{p_2 \mu}{\hbar} - \frac{p_1 \mu}{\hbar} + k_\mu \right) b_{\beta_2, -p_2}^\dagger b_{\beta_1, -p_1}^\dagger a_{\alpha, k}^\dagger \end{aligned}$$

dove la presenza della delta (che deriva dall'integrale) porta alla condizione:

$$p_{1\mu} = p_{2\mu} + \hbar k_\mu$$

che esprime la conservazione del quadrimpulso. Tuttavia, per il processo in esame questa relazione non può essere verificata in quanto, se ci si mette per esempio nel sistema di riferimento in quiete rispetto al primo elettrone (dove $E_1 = mc^2$, $\vec{p}_1 = 0$), l'altro elettrone deve avere una energia maggiore, il che non può essere. In altre parole, non è possibile che da un elettrone fermo e senza nessuna azione esterna se ne origina un altro in moto con in più l'emissione di un fotone. Formalmente, questo si vede dal fatto che valendo $p_\mu p^\mu = E^2 - c^2 \vec{p}^2 = m^2 c^4$:

$$\begin{aligned} \hbar^2 k_\mu k^\mu &= (p_{1\mu} - p_{2\mu})(p_1^\mu - p_2^\mu) = p_{1\mu} p_1^\mu + p_{2\mu} p_2^\mu - 2p_{1\mu} p_2^\mu = m^2 c^4 + m^2 c^4 - 2p_{1\mu} p_2^\mu = \\ &= 2(m^2 c^4 - E_1 E_2 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) = 2(m^2 c^4 - mc^2 E_2) = 2mc^2(mc^2 - E_2) \neq 0 \end{aligned}$$

in quanto $E_2 > mc^2$, d'altra parte vale $k_\mu k^\mu = |\vec{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$, per cui la condizione nella delta è impossibile da verificarsi ed il fenomeno fisico descritto non può avvenire. Si può ragionare in modo analogo per gli altri sette fenomeni di interazione, per cui si deduce che nessuno di questi è possibile. Quindi, *gli otto processi elementari descritti non sono realizzabili al primo ordine.*

PRODOTTO CRONOLOGICO

Agli ordini successivi di approssimazione della (7.13) compaiono prodotti di operatori che in generale non commutano fra loro. Al secondo ordine si ha:

$$-\frac{e^2}{2\hbar^2 c^2} \int \bar{\psi}(x_2) \gamma_\mu \psi(x_2) A^\mu(x_2) \bar{\psi}(x_1) \gamma_\nu \psi(x_1) A^\nu(x_1) d^4 x_1 d^4 x_2$$

sembrerebbe dunque essere presente una certa ambiguità nella definizione dell'operatore (7.13), tuttavia questa ambiguità viene completamente rimossa grazie alle seguenti considerazioni. Nello sviluppo della (7.13), si può scrivere la potenza n -sima dell'integrale come un integrale di molteplicità n , cioè:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \int H'(t) dt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int [H'_1(t) H'_2(t) \dots H'_n(t)] dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

In questo modo, si interpreta un processo all'ordine n come una successione ordinata di n processi elementari: l'ordine temporale di tale successione fornisce allora l'ordine nel prodotto di operatori (naturalmente, in modo inverso). Così, ad esempio, se un processo di ordine n è dato dalla successione degli n processi descritti rispettivamente da $H'_1(t) H'_2(t) \dots H'_n(t)$, nell'ordine temporale, ad esempio, $t_3 < t_1 < t_2 < t_h < \dots < t_n$, il prodotto in parentesi si scrive ordinatamente $H'(t_n) \dots H'(t_h) H'(t_2) H'(t_1) H'(t_3)$. Per esplicitare questo ordine cronologico la (7.13) si scrive formalmente:

$$\hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int H'(t) dt} = \hat{T} e^{-i \frac{e}{\hbar c} \int \bar{\psi}(\vec{r}, t) \gamma_\mu \psi(\vec{r}, t) A^\mu(\vec{r}, t) d^4 x_\mu} \quad (7.14)$$

7.4 Elettrodinamica Quantistica

7.4.1 Diffusione di due elettroni

Si consideri il processo del II° ordine in cui due elettroni, di impulso rispettivamente p_1 e p_2 vengono diffusi in altri due elettroni di impulso rispettivamente p_3 e p_4 . Lo stato iniziale del sistema è dunque $|p_1, \beta_1, p_2, \beta_2\rangle$, mentre quello finale è $|p_3, \beta_3, p_4, \beta_4\rangle$. Si deve quindi calcolare l'elemento di matrice:

$$\langle p_3, \beta_3, p_4, \beta_4 | -\frac{e^2}{2\hbar^2 c^2} \int \bar{\psi}(x_2) \gamma_\mu \psi(x_2) A^\mu(x_2) \bar{\psi}(x_1) \gamma_\nu \psi(x_1) A^\nu(x_1) d^4 x_1 d^4 x_2 | p_1, \beta_1, p_2, \beta_2 \rangle \equiv A + B$$

dove A e B sono gli elementi di matrice che si riferiscono rispettivamente a:

$$\begin{aligned} A : & \begin{array}{l} |p_1, \beta_1\rangle \text{ distrutto in } x_1 \\ |p_2, \beta_2\rangle \text{ distrutto in } x_2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} |p_3, \beta_3\rangle \text{ creato in } x_1 \\ |p_4, \beta_4\rangle \text{ creato in } x_2 \end{array} \\ B : & \begin{array}{l} |p_1, \beta_1\rangle \text{ distrutto in } x_1 \\ |p_2, \beta_2\rangle \text{ distrutto in } x_2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} |p_3, \beta_3\rangle \text{ creato in } x_2 \\ |p_4, \beta_4\rangle \text{ creato in } x_1 \end{array} \end{aligned}$$

basta quindi calcolare il solo termine A scambiando poi $|p_3, \beta_3\rangle$ con $|p_4, \beta_4\rangle$ per ottenere B . Per il termine A gli operatori elettronici presenti sono:

$$\begin{aligned} \psi(x_1) &= u(p_1, \beta_1) e^{-i\frac{p_1 x_1}{\hbar}} b_{-p_1, \beta_1} & \bar{\psi}(x_1) &= \bar{u}(p_3, \beta_3) e^{i\frac{p_3 x_3}{\hbar}} b_{-p_3, \beta_3}^\dagger \\ \psi(x_2) &= u(p_2, \beta_2) e^{-i\frac{p_2 x_2}{\hbar}} b_{-p_2, \beta_2} & \bar{\psi}(x_2) &= \bar{u}(p_4, \beta_4) e^{i\frac{p_4 x_4}{\hbar}} b_{-p_4, \beta_4}^\dagger \end{aligned}$$

Per quello che riguarda i campi fotonici, poiché nel processo non intervengono fotoni l'elemento di matrice da considerare è $\langle 0 | A^\mu(x_2) A^\nu(x_1) | 0 \rangle$, dove $|0\rangle$ indica lo stato di vuoto fotonico. Questo è non nullo, ovviamente, solo se il fotone che crea $A^\mu(x_2)$ (o $A^\nu(x_1)$) viene distrutto da $A^\nu(x_1)$ (o $A^\mu(x_2)$). Con questa precisazione, si osservi che vale:

$$\langle 0 | A^\mu(x_2) A^\nu(x_1) | 0 \rangle \sim e^{-ikx_2} e^{ikx_1} = e^{-ik(x_2 - x_1)}$$

ovvero l'elemento di matrice fotonico dipende solo dalla distanza relativa $x_2 - x_1$. Questo fatto suggerisce di introdurre il sistema di coordinate:

$$\begin{aligned} \xi &= x_2 - x_1 & x_1 &= \chi - \frac{\xi}{2} \\ \chi &= \frac{x_1 + x_2}{2} & x_2 &= \chi + \frac{\xi}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

mediante le quali si ha:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \bar{u}(p_4, \beta_4) \gamma_\mu u(p_2, \beta_2) \bar{u}(p_3, \beta_3) \gamma_\nu u(p_1, \beta_1) \langle p_3, \beta_3, p_4, \beta_4 | \int e^{\frac{i}{\hbar}(p_4 - p_2 + p_3 - p_1)x} d^4 x \times \\ &\quad \times b_4^\dagger b_2^\dagger b_3^\dagger b_1 | p_1, \beta_1, p_2, \beta_2 \rangle \hat{T} \int e^{\frac{i}{\hbar}(p_3 - p_1 + p_2 - p_4)\xi} \langle 0 | A^\mu(\xi) A^\nu | 0 \rangle d^4 \xi \end{aligned}$$

dove l'integrale:

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}(p_4 - p_2 + p_3 - p_1)x} d^4 x = \hbar(2\pi)^4 \delta^4(p_4 + p_3 - p_2 - p_1)$$

sancisce la conservazione dell'impulso totale $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$. Ora, risulta anche:

$$\begin{aligned} |p_1, \beta_1, p_2, \beta_2\rangle &= b_1^\dagger b_2^\dagger |0\rangle \\ |p_3, \beta_3, p_4, \beta_4\rangle &= b_3^\dagger b_4^\dagger |0\rangle \Rightarrow \langle p_3, \beta_3, p_4, \beta_4 | = \langle 0 | b_4 b_3 \end{aligned}$$

o più in generale $|p_i, \beta_i, p_j, \beta_j\rangle = b_j^\dagger b_i^\dagger |0\rangle$ che differiscono dalle precedenti solo per un segno -, cioè per un fattore di fase comune e irrilevante. Siccome poi vale anche:

$$\langle 0 | b_i b_i^\dagger | 0 \rangle = 1$$

consegue:

$$\begin{aligned} \langle p_3, \beta_3, p_4, \beta_4 | b_4^\dagger b_2^\dagger b_3^\dagger b_1 | p_1, \beta_1, p_2, \beta_2 \rangle &= \langle 0 | b_4 b_3 b_4^\dagger b_2 b_3^\dagger \underbrace{b_1 b_1^\dagger}_{=1} b_2^\dagger | 0 \rangle = \\ &= -\langle 0 | \underbrace{b_4 b_4^\dagger}_{=1} b_3 b_2 b_3^\dagger b_2^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \underbrace{b_3 b_3^\dagger}_{=1} \underbrace{b_2 b_2^\dagger}_{=1} | 0 \rangle = 1 \end{aligned}$$

Stante la conservazione dell'impulso, rimane ancora da calcolare l'elemento $\hat{T} \int e^{\frac{i}{\hbar}(p_3 - p_1 + p_2 - p_4)\xi} \langle 0 | A^\mu(\xi) A^\nu | 0 \rangle d^4\xi$. Questa è una quantità relativisticamente invariante e precisamente un 4-tensore (simmetrico) dipendente dal quadrivettore $q = p_1 - p_3$, esso può scriversi come:

$$\hat{T} \int e^{\frac{i}{\hbar}(p_3 - p_1 + p_2 - p_4)\xi} \langle 0 | A^\mu(\xi) A^\nu | 0 \rangle d^4\xi = g^{\mu\nu} F(q^2) + q^\mu q^\nu G(q^2)$$

dove $F(q^2)$ e $G(q^2)$ sono due funzioni da determinarsi dell'invariante $q_\mu q^\mu$. Si osservi subito però che la suddetta quantità entra nell'elemento di matrice A moltiplicato per γ_ν , dell'equazione di Dirac (ovvero $\gamma_\nu p^\nu = mc/\hbar$) si ha pertanto:

$$\gamma_\nu q^\nu = \gamma_\nu p_1^\nu - \gamma_\nu p_3^\nu = \frac{mc}{\hbar} - \frac{mc}{\hbar} = 0$$

per cui in A il termine $q^\mu q^\nu G(q^2)$ non interviene. Per il calcolo di $F(q^2)$, posto $q = (q_0, \vec{q})$ e scelto l'asse $z \parallel \vec{q}$, per cui risulta $q^x = q^y = 0$, poiché $g^{xx} = -1$, si ha:

$$-F(q^2) = \hat{T} \int_0^{+\infty} \int e^{iq\xi} \langle 0 | A^x(\xi) A^x(0) | 0 \rangle d\xi d\xi_0$$

Ora, vale:

$$\begin{cases} \hat{T} A^x(\xi) A^x(0) = A^x(\xi) A^x(0) & \text{se } \xi_0 > 0 \\ \hat{T} A^x(\xi) A^x(0) = A^x(0) A^x(\xi) & \text{se } \xi_0 < 0 \end{cases}$$

per cui:

$$-F(q^2) = \int \int_0^{+\infty} e^{iq\xi} \langle 0 | A^x(\xi) A^x(0) | 0 \rangle d\xi_0 d\vec{\xi} + \int \int_{-\infty}^0 e^{iq\xi} \langle 0 | A^x(0) A^x(\xi) | 0 \rangle d\xi_0 d\vec{\xi}$$

Poiché, come si è visto, occorre distruggere lo stesso fotone che si è creato, per il calcolo del primo addendo si ha:

$$\begin{aligned} A^x(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \sqrt{\frac{c}{\omega}} \vec{e}_x(\alpha, \vec{k}) a_{\alpha, \vec{k}} e^{ik\xi} d\vec{k} \\ A^x(0) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \sqrt{\frac{c}{\omega}} \vec{e}_x^*(\alpha, \vec{k}) a_{\alpha, \vec{k}}^\dagger e^{ik\xi} d\vec{k} \end{aligned}$$

Si ha dunque:

$$\begin{aligned} \int \int_0^{+\infty} e^{iq\xi} \langle 0 | A^x(\xi) A^x(0) | 0 \rangle d\xi_0 d\vec{\xi} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{c}{\omega} \int_0^{+\infty} e^{i(q_0 + |\vec{k}|)\xi_0} \int e^{i(\vec{q} + \vec{k})\vec{\xi}} d\vec{\xi} d\xi_0 d\vec{k} = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{c}{\omega} \frac{-1}{i(q_0 + |\vec{k}|)} \delta^3(\vec{q} + \vec{k}) (2\pi)^3 = \frac{1}{|\vec{q}|} \frac{-1}{i(q_0 + |\vec{k}|)} = \frac{1}{|\vec{q}|} \frac{i}{q_0 + |\vec{q}|} \end{aligned}$$

Procedendo analogamente e scambiando opportunamente $A^x(\xi)$ e $A^x(0)$ si trova:

$$\int \int_{-\infty}^0 e^{iq\xi} \langle 0 | A^x(0) A^x(\xi) | 0 \rangle d\xi_0 d\vec{\xi} = \frac{1}{|\vec{q}|} \frac{-i}{q_0 - |\vec{q}|}$$

per cui in definitiva:

$$-F(q^2) = \frac{i}{|\vec{q}|} \left(\frac{1}{q_0 + |\vec{q}|} - \frac{1}{q_0 - |\vec{q}|} \right) = \frac{i}{|\vec{q}|} \frac{q_0 - |\vec{q}| - q_0 + |\vec{q}|}{q_0^2 - |\vec{q}|^2} = -\frac{1}{q^2}$$

ovvero:

$$F(q^2) = \frac{1}{q^2}$$

L'elemento di matrice B si ottiene poi da A scambiando p_3 con p_4 , nel fare questo la cosa rilevante da notare è che:

$$\begin{aligned} \langle p_3, \beta_3, p_4, \beta_4 | b_3^\dagger b_2^\dagger b_4^\dagger b_1 | p_1, \beta_1, p_2, \beta_2 \rangle &= \langle 0 | b_4 \underbrace{b_3 b_3^\dagger} b_2 b_4^\dagger \underbrace{b_1 b_1^\dagger} b_2^\dagger | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | b_4 b_2 b_4^\dagger b_2^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \underbrace{b_4 b_4^\dagger} \underbrace{b_2 b_2^\dagger} | 0 \rangle = -1 \end{aligned}$$

Infine, sostituendo tutto si ricava:

$$A + B = i \frac{(2\pi)^4 e^2}{c \hbar c} \left[\bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \frac{g^{\mu\nu}}{(p_3 - p_1)^2} \bar{u}_3 \gamma_\nu u_1 - \bar{u}_3 \gamma_\mu u_2 \frac{g^{\mu\nu}}{(p_4 - p_1)^2} \bar{u}_4 \gamma_\nu u_1 \right] \delta(p_4 + p_3 - p_2 - p_1)$$

o anche, essendo $g^{\mu\nu} \gamma_\nu = \gamma^\mu$:

$$A + B = i \frac{(2\pi)^4 e^2}{c \hbar c} \left[\bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \frac{1}{(p_3 - p_1)^2} \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 - \bar{u}_3 \gamma_\mu u_2 \frac{1}{(p_4 - p_1)^2} \bar{u}_4 \gamma^\mu u_1 \right] \delta(p_4 + p_3 - p_2 - p_1)$$

7.4.2 Ampiezza di diffusione

Come è noto l'ampiezza di probabilità nella diffusione di due elettroni è data, con riferimento al paragrafo §7.4.1, da $|A + B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2 \Re AB^\dagger$. Si nota subito che compare il quadrato della funzione delta, che deve essere interpretato come segue:

$$\begin{aligned} [\delta(p_f - p_i)]^2 &= \delta(p_f - p_i) \delta(p_f - p_i) = \int e^{i(p_f - p_i)x} \delta(p_f - p_i) dx^4 = \\ &= \delta(p_f - p_i) \int e^{i0x} dx^4 = \delta(p_f - p_i) \int dx^4 = \delta(p_f - p_i) \frac{\mathcal{V}_{ct}}{(2\pi)^4} \end{aligned}$$

dove \mathcal{V}_{ct} è il volume quadridimensionale. Si ha dunque:

$$|A + B|^2 = \frac{(2\pi)^4}{c} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \delta(p_4 + p_3 - p_2 - p_1) \mathcal{V}_{ct} \left[\frac{|A|^2}{(p_3 - p_1)^4} + \frac{|B|^2}{(p_4 - p_1)^4} - 2 \frac{\Re AB^\dagger}{(p_3 - p_1)^2 (p_4 - p_1)^2} \right] \frac{1}{4}$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \bar{u}(p_4) \gamma_\mu u(p_2) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \\ \mathcal{B} &= \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_2) \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_1) \end{aligned}$$

Il fattore $1/4$ nel termine $|A + B|^2$ è dovuto al fatto che, per semplicità, l'ampiezza di diffusione si intende eseguita su una media degli stati di spin degli elettroni iniziali e su una somma di quelli finali e, poiché ci sono due elettroni in gioco con spin $1/2$, $1/4 = 1/2 + 1/2$.

Si calcoli $|\mathcal{A}|^2 = \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger$. Sorge qui il problema di calcolare il coniugato di $\bar{u}(p_i) \gamma_\mu u(p_j) = u^*(p_i) \gamma_0 \gamma_\mu u(p_j)$. È noto che, detti \vec{v} e \vec{w} due vettori e A una matrice, vale la relazione $(v_i A_{ij} w_j)^* = (v_i)^* (A_{ij})^* (w_j)^* = w_j^* A_{ji}^\dagger v_i^*$, dove A_{ji}^\dagger è la matrice hermitiana coniugata di A_{ij} . Da qui si ha dunque:

$$[u^*(p_i) \gamma_0 \gamma_\mu u(p_j)]^* = u^*(p_j) \gamma_\mu^\dagger \gamma_0^\dagger u(p_i)$$

Poiché vale:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} = \gamma_0^\dagger \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = -\vec{\gamma}^\dagger$$

si verifica facilmente che vale $\gamma_\mu^\dagger \gamma_0^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu$, per cui:

$$[u^*(p_i) \gamma_0 \gamma_\mu u(p_j)]^\dagger = \bar{u}(p_j) \gamma_\mu u(p_i)$$

per fare il calcolo di questo prodotto basta quindi leggere lo stesso da destra verso sinistra. Si ha pertanto:

$$|A|^2 = AA^\dagger = \bar{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_2) \underbrace{\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)\bar{u}(p_1)\gamma_\nu u(p_3)}_{\text{}} \bar{u}(p_2)\gamma^\nu u(p_4)$$

Si consideri per ora solo il termine centrale indicato dalla parentesi. Esplicitando gli indici 4-spinoriali (u è infatti un 4-spinore e γ è una matrice 4×4 ⁽⁹⁾), esso si scrive come:

$$\bar{u}(p_3)^\alpha (\gamma_\mu)_\alpha^\beta u(p_1)_\beta \bar{u}(p_1)^\delta (\gamma_\nu)_\delta^\epsilon u(p_3)_\epsilon$$

Si consideri ora l'operatore $\hat{R} = u(p)_\beta \bar{u}(p)^\delta$, esso risulta un operatore di proiezione in quanto ($\bar{u}u = 1$)¹⁰:

$$\hat{R}^2 = u(p)_\beta [\bar{u}(p)^\delta u(p)_\delta] \bar{u}(p)^\lambda = u(p)_\beta \bar{u}(p)^\lambda = \hat{R}$$

L'operatore $\hat{Q} = (\hat{p} + m)/2m$, con $\hat{p} = p^\mu \gamma_\mu$, sussistendo l'equazione di Dirac, è anch'esso un operatore di proiezione:

$$\hat{Q}^2 = \frac{\hat{p} + m}{2m} \frac{\hat{p} + m}{2m} = \frac{1}{4m^2} (\hat{p}^2 + m^2 + 2m\hat{p}) = \frac{\hat{p} + m}{2m} = \hat{Q}$$

inoltre vale anche:

$$\hat{Q}\hat{R} = \left(\frac{\hat{p} + m}{2m}\right)_\alpha^\beta u(p)_\beta \bar{u}(p)^\lambda = u(p)_\alpha \bar{u}(p)^\lambda = \hat{R}$$

questo fra presumere che \hat{Q} e \hat{R} possano in fin dei conti essere lo stesso operatore, tanto più che entrambi hanno dimensione 2. In pratica, \hat{Q} proietta sugli stati a energia negativa. Quest'ultima affermazione non sarà qui dimostrata rigorosamente, si assumerà tuttavia nel seguito che $\hat{Q} = \hat{R}$. Con questa posizione si ha allora:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_3)^\alpha (\gamma_\mu)_\alpha^\beta u(p_1)_\beta \bar{u}(p_1)^\delta (\gamma_\nu)_\delta^\epsilon u(p_3)_\epsilon &= \bar{u}(p_3)^\alpha (\gamma_\mu)_\alpha^\beta \left(\frac{\hat{p}_1 + m}{2m}\right)_\beta^\delta (\gamma_\nu)_\delta^\epsilon u(p_3)_\epsilon = \\ &= (\gamma_\mu)_\alpha^\beta \left(\frac{\hat{p}_1 + m}{2m}\right)_\beta^\delta (\gamma_\nu)_\delta^\epsilon u(p_3)_\epsilon \bar{u}(p_2)^\alpha = (\gamma_\mu)_\alpha^\beta \left(\frac{\hat{p}_1 + m}{2m}\right)_\beta^\delta (\gamma_\nu)_\delta^\epsilon \left(\frac{\hat{p}_3 + m}{2m}\right)_\epsilon^\alpha = \\ &= \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{\hat{p}_1 + m}{2m} \gamma_\nu \frac{\hat{p}_3 + m}{2m} \right] = \\ &= \frac{1}{4m^2} \text{Tr} [p_1^\rho p_3^\sigma \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma + m(p_1^\rho \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu + p_3^\sigma \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma) + m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu] \end{aligned}$$

Ora, è facile mostrare che la traccia di una qualsiasi matrice γ e di qualsiasi prodotto di 3 matrici γ è nullo¹¹. Sfruttando poi l'identità:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu}{2} + \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu}{2} = g_{\mu\nu} + \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu}{2} \quad (7.15)$$

insieme al fatto che la traccia è invariante per permutazioni cicliche:

$$\text{Tr} AB = \text{Tr} BA \quad \Rightarrow \quad \text{Tr} [A, B] = 0$$

e infine che $\text{Tr} \mathbb{1}_4 = 4$ ¹² si ha:

$$\text{Tr} \gamma_\mu \gamma_\nu = 4g_{\mu\nu} \quad (7.16)$$

⁹Si ricordi comunque che si è sommato sugli spin.

¹⁰Per semplicità si usa qui il sistema di unità in cui $c = \hbar = 1$, in questo sistema l'equazione di Dirac si scrive $(p^\mu \gamma_\mu)_\alpha^\beta u(p)_\beta = \mu(p)_\alpha$.

¹¹In generale, il prodotto di $(2n + 1)$ matrici γ ha traccia nulla.

¹²Si osservi che la traccia non si esegue sugli indici μ, ν di quadritensore ma su quelli α, β di 4-spinorialità.

Si ha ancora:

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma &= (2g_{\mu\rho} - \gamma_\rho \gamma_\mu) \gamma_\nu \gamma_\sigma = \\ &= 2g_{\mu\rho} \gamma_\nu \gamma_\sigma - \gamma_\rho (2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma_\sigma = \\ &= 2g_{\mu\rho} \gamma_\nu \gamma_\sigma - 2g_{\mu\nu} \gamma_\rho \gamma_\sigma + \gamma_\rho \gamma_\nu (2g_{\mu\sigma} - \gamma_\sigma \gamma_\mu)\end{aligned}$$

e dunque:

$$\text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma = 2g_{\mu\rho} \text{Tr } \gamma_\nu \gamma_\sigma - 2g_{\mu\nu} \text{Tr } \gamma_\rho \gamma_\sigma - \text{Tr } \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu$$

poiché la traccia è ciclica $\text{Tr } \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu = \text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma$, e dalla (7.15) si ricava:

$$\not{z} \text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma = \not{z} g_{\mu\rho} 4g_{\nu\sigma} - \not{z} g_{\mu\nu} 4g_{\rho\sigma} + \not{z} g_{\mu\sigma} 4g_{\rho\nu}$$

ovvero:

$$\text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma = 4(g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}) \quad (7.17)$$

quindi:

$$\begin{aligned}\bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma_\nu u(p_3) &= \frac{1}{4m^2} [4p_1^\rho p_3^\sigma (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}) + 4m^2 g_{\mu\nu}] = \\ &= g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} [p_{1\mu} p_{3\nu} - g_{\mu\nu} p_1^\rho p_{3\rho} + p_{1\nu} p_{3\mu}] = \\ &= g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} [p_{1\mu} p_{3\nu} + p_{1\nu} p_{3\mu} - g_{\mu\nu} p_1 \cdot p_3]\end{aligned}$$

Procedendo analogamente si arriva alla:

$$|\mathcal{A}|^2 = \left[g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} (p_{1\mu} p_{3\nu} + p_{1\nu} p_{3\mu} - g_{\mu\nu} p_1 \cdot p_3) \right] \left[g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} (p_2^\mu p_4^\nu + p_2^\nu p_4^\mu - g_{\mu\nu} p_2 \cdot p_4) \right]$$

e poiché $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$ ($g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$):

$$|\mathcal{A}|^2 = 4 - \frac{2}{m^2} (p_2 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_3) + \frac{2}{m^2} (p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4)$$

e scambiando l'indice 3 con l'indice 4 si ricava ancora:

$$|\mathcal{B}|^2 = 4 - \frac{2}{m^2} (p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4) + \frac{2}{m^2} (p_1 \cdot p_2 p_4 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3)$$

Rimane quindi da calcolare il termine:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathcal{B}^\dagger &= \bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_2) \bar{u}(p_2) \gamma_\nu u(p_3) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu (p_4) = \\ &= \frac{1}{16m^4} \text{Tr}(\hat{p}_2 + m) \gamma_\nu (\hat{p}_3 + m) \underbrace{\gamma_\mu (\hat{p}_1 + m) \gamma^\nu (\hat{p}_4 + m) \gamma^\mu}_{\text{evidenziato}}\end{aligned}$$

Per il termine evidenziato si ha:

$$\begin{aligned}\gamma_\mu (\hat{p}_1 + m) \gamma^\nu (\hat{p}_4 + m) \gamma^\mu &= \gamma_\mu \hat{p}_1 \gamma^\nu \hat{p}_4 \gamma^\mu + m(\gamma_\mu \hat{p}_1 \gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma_\mu \gamma^\nu \hat{p}_4 \gamma^\mu) + m^2 \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = \\ &= p_{1\sigma} p_{4\rho} (\gamma_\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu) + m p_{4\rho} (\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu) + m^2 \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu\end{aligned}$$

ora, risulta:

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = \gamma_\mu (2g^{\nu\mu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) = 2\gamma^\nu - 4\gamma^\nu = -2\gamma^\nu$$

ancora:

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu &= \gamma_\mu \gamma^\nu (2g^{\rho\mu} - \gamma^\mu \gamma^\rho) = 2\gamma^\rho \gamma^\nu - \gamma^\mu (2g^{\nu\mu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) \gamma^\rho = \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\nu + 2\gamma^\nu \gamma^\rho = 4g^{\rho\nu}\end{aligned} \quad (7.18)$$

infine:

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu &= \gamma_\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu (2g^{\mu\rho} - \gamma^\mu \gamma^\rho) = 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - \gamma_\mu \gamma^\sigma (2g^{\nu\mu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) \gamma^\rho = \\
&= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - 2\gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho + \gamma_\mu (2g^{\sigma\mu} - \gamma^\mu \gamma^\sigma) \gamma^\nu \gamma^\rho = \\
&= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - 2\gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho - 2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho = 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - 4g^{\nu\sigma} \gamma^\rho = \\
&= 2\gamma^\rho (-2g^{\nu\sigma} + \gamma^\sigma \gamma^\nu) = 2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma
\end{aligned} \tag{7.19}$$

che sostituite forniscono:

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu (\hat{p}_1 + m) \gamma^\nu (\hat{p}_4 + m) \gamma^\mu &= -2p_{1\sigma} p_{4\rho} \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma + 4mp_{1\sigma} g^{\nu\sigma} + 4mp_{4\rho} g^{\rho\nu} - 2m^2 \gamma^\nu = \\
&= -2p_{1\sigma} p_{4\rho} \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma + 4m(p_1^\nu + p_4^\nu) - 2m^2 \gamma^\nu
\end{aligned}$$

Notando ora che:

$$\hat{p}_1 \gamma^\nu = p_{1\rho} \gamma^\rho \gamma^\nu = p_{1\rho} g^{\nu\rho} \gamma_\nu \gamma^\nu = 4p_{1\rho} g^{\nu\rho} = 4p_1^\nu$$

si ricava che $\gamma_\mu (\hat{p}_1 + m) \gamma^\nu (\hat{p}_4 + m) \gamma^\mu = -2\hat{p}_4 \gamma^\nu \hat{p}_1 + m(\hat{p}_1 \gamma^\nu + \hat{p}_4 \gamma^\nu) - 2m^2 \gamma^\nu$. Da questa relazione discende:

$$\begin{aligned}
\mathcal{AB}^\dagger &= \frac{1}{16m^2} \text{Tr}(\hat{p}_2 + m) (\gamma_\nu \hat{p}_3 + m\gamma_\nu) [-2\hat{p}_4 \gamma^\nu \hat{p}_1 + m(\hat{p}_1 \gamma^\nu + \hat{p}_4 \gamma^\nu) - 2m^2 \gamma^\nu] = \\
&= \frac{1}{16m^2} \text{Tr}(\hat{p}_2 + m) [-2\gamma_\nu \hat{p}_3 \hat{p}_4 \gamma^\nu \hat{p}_1 + m\gamma_\nu \hat{p}_3 \hat{p}_1 \gamma^\nu + m\gamma_\nu \hat{p}_3 \hat{p}_4 \gamma^\nu + \\
&\quad -2m^2 \gamma_\nu \hat{p}_3 \gamma^\nu - 2m\gamma_\nu \hat{p}_4 \gamma^\nu \hat{p}_1 + m^2 \gamma_\nu \hat{p}_1 \gamma^\nu + m^2 \gamma_\nu \hat{p}_4 \gamma^\nu - 2m^3 \gamma_\nu \gamma^\nu]
\end{aligned}$$

Dalle relazioni (7.18) e (7.19) si ricava subito:

$$\begin{aligned}
\gamma_\nu \hat{p} \gamma^\nu &= -2\hat{p} \\
\gamma_\nu \hat{p}_i \hat{p}_j \gamma^\nu &= 4p_i \cdot p_j
\end{aligned}$$

mentre dalla relazione:

$$\gamma_\nu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma = \gamma_\nu \gamma^\rho (2g^{\nu\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\nu) = 2\gamma^\sigma \gamma^\rho - 4g^{\rho\sigma}$$

si ricava:

$$\gamma_\nu \hat{p}_i \gamma^\nu \hat{p}_j = 2p_j \cdot p_i - 4p_j \cdot p_i$$

Sostituendo nella relazione di sopra si ricava:

$$\mathcal{AB}^\dagger = \frac{1}{16m^2} \text{Tr}(\hat{p}_2 + m) [-8p_3 \cdot p_4 \hat{p}_1 + m(p_3 \cdot p_1 + p_3 \cdot p_4 - 4\hat{p}_1 \hat{p}_4 + 8p_1 \cdot p_4) + 2m^2(2\hat{p}_3 - \hat{p}_1 - \hat{p}_4) - 8m^3]$$

non riscrivendo i termini che hanno un angolo tra le matrici γ , che hanno traccia nulla:

$$\mathcal{AB}^\dagger = \frac{1}{16m^2} \text{Tr}(\hat{p}_2 + m) [-8\hat{p}_2 p_3 \cdot p_4 \hat{p}_1 + m^2(4\hat{p}_2 \hat{p}_3 - 2\hat{p}_2 \hat{p}_1 - 2\hat{p}_2 \hat{p}_4 + p_3 \cdot p_1 + p_3 \cdot p_4 - 4\hat{p}_1 \hat{p}_4 + 8p_1 \cdot p_4) - 8m^4]$$

e dalle relazioni (7.16) et (7.17):

$$\begin{aligned}
\mathcal{AB}^\dagger &= \frac{1}{16m^2} [-32p_3 \cdot p_4 p_2 \cdot p_1 + m^2(16p_1 \cdot p_3 - 8p_2 \cdot p_1 - 8p_2 \cdot p_4 \\
&\quad + 4p_3 \cdot p_1 + 4p_3 \cdot p_4 - 16p_1 \cdot p_4 + 32p_1 \cdot p_4) - 32m^4]
\end{aligned}$$

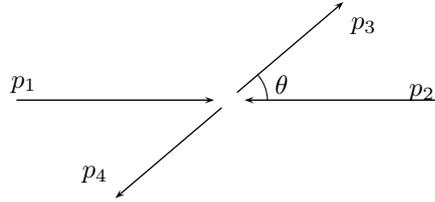
ovvero:

$$\mathcal{AB}^\dagger = -2 + \frac{1}{m^2} \left[(p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4) - \frac{1}{4} (p_2 + p_4) (2p_2 - p_3) \right] - \frac{2}{m^4} p_3 \cdot p_4 p_2 \cdot p_1$$

Si osservi che AB^\dagger è reale, per cui l'ampiezza di diffusione è $2 \Re AB^\dagger = 2AB^\dagger$.

7.4.3 Dipendenza dall'angolo di diffusione

Nella diffusione di due elettroni si supponga che le particelle siano dirette come indicato in figura.



Si ha quindi:

$$\begin{aligned} p_1 &= (E, 0, 0, p) & p_3 &= (E, p \sin \theta, 0, p \cos \theta) \\ p_2 &= (E, 0, 0, -p) & p_4 &= (E, -p \sin \theta, 0, -p \cos \theta) \end{aligned}$$

Si nota subito che lo scambio di p_3 con p_4 equivale allo scambio di θ con $\theta + \pi$. Si ha subito che $(p_3 - p_1) = (0, p \sin \theta, 0, p(\cos \theta - 1))$ e quindi:

$$\begin{aligned} (p_3 - p_1)^2 &= p^2(\sin^2 \theta + 1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta) = 2p^2(1 - \cos \theta) = 4p^2 \sin^2(\theta/2) \\ (p_4 - p_1)^2 &= 4p^2 \cos^2(\theta/2) \\ p_1 \cdot p_3 &= p_2 \cdot p_4 = E^2 - p^2 \cos \theta \\ p_1 \cdot p_2 &= p_3 \cdot p_4 = E^2 + p^2 \\ p_1 \cdot p_4 &= p_2 \cdot p_3 = E^2 + p^2 \cos \theta \\ p_1 + p_4 &= (2E, -p \sin \theta, 0, p(1 - \cos \theta)) \\ 2p_2 - p_3 &= (E, -p \sin \theta, 0, -p(2 + \cos \theta)) \end{aligned}$$

ovvero:

$$(p_1 + p_4) \cdot (2p_2 - p_3) = 2E^2 - p^2(\sin^2 \theta - 2 - \cos \theta - \cos^2 \theta) = 2E^2 + p^2(\cos(2\theta) + \cos \theta + 2)$$

ponendo ora (in unità naturali $c = 1$): $v = p/E$, si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{|A|^2}{(p_3 - p_1)^4} &= \frac{1}{4E^4 v^4 \sin^4(\theta/2)} \left[1 - \frac{E^2}{m^2}(1 - v^2 \cos \theta) + \frac{E^4}{2m^4} (v^4(1 + \cos^2 \theta) + 2v^2(1 + \cos \theta) + 2) \right] \\ \frac{|B|^2}{(p_4 - p_1)^4} &= \frac{1}{4E^4 v^4 \cos^4(\theta/2)} \left[1 - \frac{E^2}{m^2}(1 + v^2 \cos \theta) + \frac{E^4}{2m^4} (v^4(1 + \cos^2 \theta) + 2v^2(1 - \cos \theta) + 2) \right] \\ \frac{AB^\dagger}{(p_3 - p_1)^2(p_4 - p_1)^2} &= \frac{1}{2E^4 v^4 \sin^2 \theta} \left[1 + \frac{E^2}{m^2} \left((v^2(\cos(2\theta) + 2) - \frac{3}{4}) + \frac{2E^4}{m^4}(1 + v^2)^2 \right) \right] \end{aligned}$$

7.4.4 Forma generale dell'ampiezza di diffusione

Nei processi di diffusione, la probabilità di transizione da uno stato $\langle i |$ a uno stato $\langle f |$ si può scrivere nella forma (in unità naturali $\hbar = c = 1$):

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) |T_{fi}|^2 V t$$

dove la $\delta^{(4)}$ assicura la conservazione del quadrimpulso e T_{fi} è l'ampiezza di diffusione che nel caso di due elettroni, per esempio, assume la forma $\frac{|A|^2}{(p_3 - p_1)^2} + \frac{|B|^2}{(p_4 - p_1)^2}$. La probabilità di transizione nell'unità di tempo è data dalla forma:

$$W_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) |T_{fi}|^2 V$$

Consideriamo per ora il decadimento di una particella di impulso p_1 in due corpi di impulso p_2 e p_3 . Allora risulta $p_i = p_1$ e $p_f = p_2 + p_3$. Come è noto, il numero di stati nell'elemento di volume dello

spazio delle fasi $d^3\vec{r}d^3\vec{p}_2d^3\vec{p}_3$ è dato da $V^2d^3\vec{r}d^3\vec{p}_3/(2\pi)^3$. La probabilità di transizione nell'unità di tempo ad uno di questi stato è:

$$dW = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i)|T_{fi}|^2 \frac{V^2d^3\vec{r}d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3}$$

le funzioni d'onda utilizzate per calcolare gli elementi di matrice T_{fi} devono essere normalizzate in modo tale che nel volume V ci sia una sola particella. Così, se per l'elettrone si considera la funzione $\psi = ue^{-ip\cdot x}$ ($u^\dagger u = 1$) e per il fotone $A = \sqrt{4\pi} e^{-ik\cdot x}$ ($ee^* = -1$, $\vec{e} \cdot \vec{k} = 0$), si può vedere che per ciascuna particella la funzione d'onda deve essere moltiplicata per il fattore di normalizzazione $1/\sqrt{2\varepsilon_i V}$, dove ε_i è l'energia della particella considerata. Questi fattori possono essere resi espliciti ponendo nel caso in esame:

$$T_{fi} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_1 V} \sqrt{2\varepsilon_2 V} \sqrt{2\varepsilon_3 V}} M_{fi}$$

mediante la quale si ha:

$$dW = \frac{|M_{fi}^2|^2}{32\pi^2 m} \delta(\vec{p}_2 + \vec{p}_3) \delta(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - m) \frac{d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}_3}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \quad (7.20)$$

Integrando per esempio in $d^3\vec{p}_3$ si elimina la prima funzione δ , ponendo poi $\vec{p}_2 = -\vec{p}_3 \rightarrow |p_2| = |p_3| = p$ rimane la sola integrazione in $d^3\vec{p}_2 = p^2 dp_2 d\Omega$. Poiché $p_2^2 = p_2^2$ e $p_i^2 = \varepsilon_i^2 - m_i^2$ differenziando si ha $2p_i dp_i = 2\varepsilon_i d\varepsilon_i$, da cui:

$$d\varepsilon_2 = \frac{p_2}{\varepsilon_2} dp_2 \quad d\varepsilon_3 = \frac{p_3}{\varepsilon_3} dp_3$$

e siccome vale $p_2 = p_3$, sommando si ha:

$$d(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) p_2 dp_2 \Rightarrow p_2 dp_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} d(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

da cui:

$$\frac{p_2^2 dp_2 d\Omega}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} = \frac{p}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} d(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) d\Omega$$

che sostituita nella (7.20) fornisce:

$$dW = \frac{|M_{fi}^2|^2}{32\pi^2 m} \delta(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - m) \frac{p}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} d(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) d\Omega$$

Integrando infine in $d(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$ scompare anche l'altra funzione δ e ponendo $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = m$ si ha:

$$dW = \frac{|M_{fi}^2|^2}{32\pi^2 m} p d\Omega$$

Considerando ora la diffusione di due elettroni di quadrimpulso iniziale p_1, p_2 e quadrimpulso finale p_3, p_4 la probabilità di transizione si scrive:

$$dW = (2\pi)^4 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{|M_{fi}^2|^2}{V^4 16\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4} \frac{V^2 d^3\vec{p}_3 d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^6}$$

In questi processi, tuttavia, interessa la sezione d'urto differenziale, la quale si ottiene a partire da dW dividendo per il flusso relativo delle particelle incidenti:

$$j = \frac{v_1 + v_2}{V} = \frac{1}{V} \left(\frac{|\vec{p}_1|}{\varepsilon_1} + \frac{|\vec{p}_2|}{\varepsilon_2} \right) = \frac{2}{V} \frac{p}{E}$$

dove $v_i = p_i/E_i$ è la velocità nel sistema di riferimento del laboratorio e nel quale si ha $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = E$. Si ha dunque:

$$d\sigma = \frac{|M_{fi}^2|^2}{64\pi^2} \frac{1}{E^2} \frac{E}{2p} \delta(\vec{p}_3 + \vec{p}_4) \delta(\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - 2E) \frac{d^3\vec{p}_3 d^3\vec{p}_4}{\varepsilon_3 \varepsilon_4}$$

e procedendo come sopra si arriva alla forma:

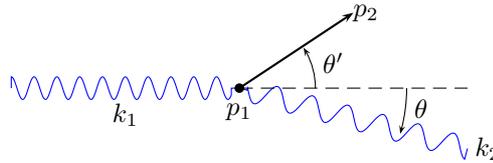
$$d\sigma = \frac{|M_{fi}^2|^2}{64\pi^2} \frac{1}{E^2} \frac{E'}{2p} \frac{p'}{2E} d\Omega$$

ovvero:

$$d\sigma = \frac{|M_{fi}^2|^2}{64\pi^2} \frac{1}{4E^2} d\Omega$$

7.4.5 Sezione d'urto dell'effetto Compton

Si consideri la diffusione di un fotone su di un elettrone ($\hbar = c = 1$):



La conservazione del quadrimpulso si scrive:

$$k_1 + p_1 = k_2 + p_2$$

dove nel sistema di riferimenti di quiete dell'elettrone iniziale vale:

$$\begin{aligned} k_1 &= (\omega, 0, 0, \omega) & k_2 &= (\omega', \omega' \sin \theta, 0, \omega' \cos \theta) \\ p_1 &= (m, 0, 0, 0) & p_2 &= (E, -p \sin \theta', 0, p \cos \theta) \end{aligned}$$

e la conservazione dell'impulso diventa così:

$$\begin{aligned} \omega + m &= \omega' + E \\ 0 &= \omega' \sin \theta - p \sin \theta' \\ \omega &= \omega' \cos \theta + p \cos \theta' \end{aligned}$$

L'invariante $m^2 = E^2 - p^2 = p^2(\sin^2 \theta' + \cos^2 \theta')$ si scrive allora (sostituendo le precedenti):

$$\begin{aligned} m^2 &= (\omega + m - \omega')^2 - p^2 \sin^2 \theta' - p^2 \cos^2 \theta' \\ m^2 &= \omega^2 + m^2 + \omega'^2 + 2m\omega - 2\omega\omega' - 2m\omega' - \omega'^2 \sin^2 \theta' - \omega^2 - \omega'^2 \cos^2 \theta' + 2\omega\omega' \cos \theta \\ 0 &= 2m(\omega - \omega') - 2\omega\omega'(1 - \cos \theta) \\ m &\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} \right) = (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

da cui, sostituendo $\lambda = 2\pi/\omega$, si ricava:

$$\lambda - \lambda' = \frac{2\pi}{m}(1 - \cos \theta)$$

e esplicitando le \hbar e c :

$$\lambda - \lambda' = 2\pi \frac{\hbar}{mc}(1 - \cos \theta)$$

Il processo di diffusione $\gamma_{k_1} + e_{p_1}^- \rightarrow \gamma_{k_2} + e_{p_2}^-$ è descritto da:

$$S_{fi} = -\frac{e^2}{2} \langle k_2 p_2 | T \int \bar{\psi}(x_2) \gamma_\mu \psi(x_2) A^\mu(x_2) \bar{\psi}(x_1) \gamma_\nu \psi(x_1) A^\nu(x_1) d^4 x_1 d^4 x_2 | k_1 p_1 \rangle$$

dove sono possibili i seguenti due casi:

- | | | |
|---|--------------------------------------|---|
| A | distruzione fotone iniziale in x_2 | distruzione elettrone iniziale in x_2 |
| | distruzione fotone finale in x_1 | distruzione elettrone finale in x_1 |
| B | distruzione fotone iniziale in x_2 | distruzione elettrone iniziale in x_1 |
| | distruzione fotone finale in x_1 | distruzione elettrone finale in x_2 |

Ovviamente, la creazione o distruzione in uno stesso punto (x_1 o x_2) di elettroni insieme con un fotone annulla S_{fi} e quindi non è possibile. Per il caso **A** occorre considerare:

$$\begin{aligned} A^\mu(x_2) &= a_1 e^\mu(k_1, \alpha_1) e^{-ik_1 \cdot x_2} & \psi(x_2) &= b_1 u(p_1, \beta_1) e^{-ip_1 \cdot x_2} \\ A^\nu(x_1) &= a_2^\dagger e^{*\nu}(k_2, \alpha_2) e^{-ik_2 \cdot x_1} & \bar{\psi}(x_1) &= b_2^\dagger u(p_2, \beta_2) e^{-ip_2 \cdot x_1} \end{aligned}$$

scrivendo $|k_1 p_1\rangle = a_1^\dagger b_1^\dagger |0\rangle$ e $\langle k_2 p_2| = \langle 0| a_2 b_2$, la parte operazionale per $t_2 > t_1$ è:

$$\begin{aligned} \langle 0| a_2 b_2 \bar{\psi}(x_2) b_1 a_1 b_2^\dagger \psi(x_1) a_2^\dagger a_1^\dagger b_1^\dagger |0\rangle &= \langle 0| b_2 \bar{\psi}(x_2) b_1 b_2^\dagger \psi(x_1) b_1^\dagger |0\rangle = \\ &= \langle 0| b_2 \bar{\psi}(x_2) b_2^\dagger \psi(x_1) |0\rangle = \\ &= -\langle 0| \bar{\psi}(x_2) \psi(x_1) |0\rangle \end{aligned}$$

mentre per $t_1 > t_2$ è:

$$\begin{aligned} \langle 0| a_2 b_2 b_2^\dagger \psi(x_1) a_2^\dagger \bar{\psi}(x_2) b_1 a_1 a_1^\dagger b_1^\dagger |0\rangle &= \langle 0| b_2 b_2^\dagger \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) b_1 b_1^\dagger |0\rangle = \\ &= \langle 0| \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) |0\rangle \end{aligned}$$

si può quindi definire per compattezza il seguente prodotto cronologico:

$$\tilde{T} \langle 0| \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) |0\rangle = \begin{cases} \langle 0| \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) |0\rangle & t_1 > t_2 \\ -\langle 0| \bar{\psi}(x_2) \psi(x_1) |0\rangle & t_2 > t_1 \end{cases}$$

e, notando che può dipendere solo da $x_1 - x_2$, porre:

$$D(x_1 - x_2) = \tilde{T} \langle 0| \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) |0\rangle$$

e quindi introdurre definitivamente le nuove variabili $\xi = x_2 - x_1$ e $\chi = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Si ha quindi, riprendendo la notazione precedente:

$$\begin{aligned} A &= \int \bar{u}(p_2) \gamma_\nu D(x_1 - x_2) \gamma_\mu u(p_1) e^{*\nu}(k_2) e^\mu(k_1) e^{-ip_1 \cdot x_2} e^{-ik_1 \cdot x_2} e^{ip_2 \cdot x_1} e^{ik_2 \cdot x_1} d^4 x_1 d^4 x_2 = \\ &= \bar{u}(p_2) \gamma_\nu \int D(\xi) e^{-i(p_1 + k_1 + p_2 + k_2) \cdot \frac{\xi}{2}} d^4 \xi \gamma_\mu u(p_1) e^{*\nu}(k_2) e^\mu(k_1) \int e^{-i(-p_1 - k_1 + p_2 + k_2) \cdot \chi} d^4 \chi = \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \bar{u}(p_2) \gamma_\nu \int D(\xi) e^{-i(p_1 + k_1) \cdot \xi} d^4 \xi e^{*\nu}(k_2) e^\mu(k_1) \end{aligned}$$

per il calcolo dell'integrale in ξ , ponendo $(\hat{k}_1 + \hat{p}_1)_\beta^\alpha = (\gamma_\rho)_\beta^\alpha (k_1^\rho + p_1^\rho)$ e osservando che $(k_1 + p_1)^\rho e^{-i\xi(k_1 + p_1)} = i \partial^\rho e^{-i\xi(k_1 + p_1)}$, vale:

$$(\hat{k}_1 + \hat{p}_1) \int D(\xi) e^{-i(p_1 + k_1) \cdot \xi} d^4 \xi = i \gamma_\rho \int \tilde{T} \langle 0| \psi(-\xi) \bar{\psi}(0) |0\rangle \partial^\rho e^{-i\xi(k_1 + p_1)} d^4 \xi$$

e integrando per parti si ha:

$$(\hat{k}_1 + \hat{p}_1) \int D(\xi) e^{-i(p_1 + k_1) \cdot \xi} d^4 \xi = i \gamma_\rho \int \partial^\rho \langle 0| \psi(-\xi) \bar{\psi}(0) |0\rangle e^{-i\xi(k_1 + p_1)} d^4 \xi$$

Per la definizione di \tilde{T} , quando si esegue la derivata del prodotto cronologico bisogna stare attenti quando $\xi_t = 0$, perché per questo valore $\tilde{T} \psi(-\xi) \bar{\psi}(0)$ ha una discontinuità di prima specie (assume due valori distinti). Ricordando che:

$$\delta(\xi_t) = \frac{\partial}{\partial \xi_t} \mathcal{O}(\xi_t)$$

si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_t} \tilde{T} \psi(-\xi) \bar{\psi}(0) = \tilde{T} \frac{\partial}{\partial \xi_t} \psi(-\xi) \bar{\psi}(0) \Big|_{\xi_t \neq 0} + \delta(\xi_t) \left\{ \left[\tilde{T} \psi(-\xi) \bar{\psi}(0) \right]_{\xi_t=0^+} - \left[\tilde{T} \psi(-\xi) \bar{\psi}(0) \right]_{\xi_t=0^-} \right\}$$

per cui, sostituendo sopra:

$$A = \tilde{T} \int \langle 0 | i \gamma_\rho \partial^\rho \psi(\xi) \bar{\psi}(0) | 0 \rangle e^{-i(k_1+p_1)\xi} d^4 \xi - i \gamma_0 \int - [\bar{\psi}(0) \psi(-\xi, 0^-) + \psi(-\xi, 0^+) \bar{\psi}(0)] \delta(\xi_t) e^{-i(k_1+p_1)\xi} d^4 \xi$$

Per l'equazione di Dirac $-i \gamma_\rho \partial^\rho \psi(-\xi) = m \psi(-\xi)$ e ricordando inoltre che $\{\psi^\dagger(0), \psi(-\xi)\} = \delta(\xi) \Rightarrow \{\psi^+(0), \psi(-\xi)\} = \delta(\xi) \gamma_0$ si ha:

$$\begin{aligned} A &= m \int \tilde{T} \langle 0 | i \gamma_\rho \partial^\rho \psi(\xi) \bar{\psi}(0) | 0 \rangle e^{-i(k_1+p_1)\xi} d^4 \xi + i \gamma_0 \gamma_0 \int \delta(\xi) \delta(\xi_t) e^{-i(k_1+p_1)\xi} d^4 \xi \\ &= m \int \tilde{T} \langle 0 | i \gamma_\rho \partial^\rho \psi(\xi) \bar{\psi}(0) | 0 \rangle e^{-i(k_1+p_1)\xi} d^4 \xi + i \cdot 1 \cdot 1 \end{aligned}$$

si ha dunque che $D(\xi)$ soddisfa l'equazione:

$$(\hat{k}_1 + \hat{p}_1 - m) \int D(\xi) e^{-i(k_1+p_1)\xi} d^4 \xi = i$$

per cui è:

$$\int D(\xi) e^{-i(k_1+p_1)\xi} d^4 \xi = i \frac{\hat{k}_1 + \hat{p}_1 + m}{(k_1 + p_1)^2 - m^2}$$

e sostituendo si ottiene:

$$\mathcal{A} = \bar{u}(p_2) \gamma_\nu i \frac{\hat{k}_1 + \hat{p}_1 + m}{(k_1 + p_1)^2 - m^2} \gamma_\mu u(p_1) e^{* \nu}(k_2) e^\mu(k_1)$$

È facile vedere per calcolo diretto che il termine B si può ottenere dalla forma di A per scambio di $k_1 \leftrightarrow -k_2$ e l'ampiezza di diffusione è simmetrica in tale scambio, si ha quindi:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \bar{u}(p_2) \gamma_\nu i \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m}{(k_1 + p_1)^2 - m^2} \gamma_\mu u(p_1) e^{* \nu}(k_2) e^\mu(k_1) + \bar{u}(p_2) \gamma_\nu i \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \gamma_\mu u(p_1) e^{* \nu}(k_1) e^\mu(k_2)$$

dove si è anche sfruttato il fatto che $e^*(-k) = e(k)$.

Calcoliamo ora $|\mathcal{A} + \mathcal{B}|^2 = |\mathcal{A}|^2 + |\mathcal{B}|^2 + 2 \Re \mathcal{A} \mathcal{B}^\dagger$. Per il seguito è comodo notare che $p_1 + k_1 = p_2 + k_2$ e che $(k_1 + p_1)^2 - m^2 = k_1^2 + p_1^2 + 2k_1 \cdot p_1 - m^2 = 0 + m^2 + 2k_1 \cdot p_1 - m^2 = 2k_1 \cdot p_1$. Si ha:

$$|\mathcal{A}|^2 = \bar{u}(p_2) \gamma_\nu i \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m}{2k_1 \cdot p_1} \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma_\rho i \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m}{2k_1 \cdot p_1} \gamma_\sigma u(p_2) e^{* \nu}(k_2) e^\mu(k_1) e^\sigma(k_2) e^{* \rho}(k_1)$$

Si consideri, per esempio, $T_2^{\nu\sigma} = e^{* \nu}(k_2) e^\sigma(k_2)$ (e analogamente $T_2^{\rho\mu} = e^{* \rho}(k_1) e^\mu(k_1)$). Fissato l'asse z in direzione \vec{k}_2 , le due polarizzazioni possibile del fotone sono lungo x e y , per cui è $T_2^{\nu\sigma} = \delta_1^\nu \delta_1^\sigma + \delta_2^\nu \delta_2^\sigma$. si vuole far vedere che se a questo si aggiunge il termine $\delta_3^\nu \delta_3^\sigma + \delta_0^\nu \delta_0^\sigma$, in modo che $T_2^{\nu\sigma} = g^{\nu\sigma}$, l'ampiezza di diffusione non cambia. In altre parole si dimostrerà, in generale, che se $T_2^{\nu\sigma} \rightarrow T_2^{\nu\sigma} + k_2^\nu \chi^\sigma + k_2^\sigma \chi^\nu$ l'ampiezza di diffusione resta invariata e più particolarmente che:

$$k_2^\nu \left[\bar{u}(p_2) \gamma_\nu i \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m}{2p_1 \cdot k_1} \gamma_\mu u(p_2) \hat{e}^\mu(k_2) + \bar{u}(p_2) \gamma_\mu i \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m}{-2p_1 \cdot k_2} \gamma_\nu u(p_1) \hat{e}^\mu(k_1) \right] = 0$$

da notare che gli indici μ e ν sono muti (si procederà in maniera analoga per $T_1^{\rho\mu}$). Poiché vale $\hat{p}_1 + \hat{k}_1 = \hat{p}_2 + \hat{k}_2$, da cui $2p_1 \cdot k_2 = p_1 \cdot k_2$, si ha:

$$k_2^\nu [\dots] = \bar{u}(p_2) \hat{k}_2 i \frac{\hat{p}_2 + \hat{k}_2 + m}{2p_2 \cdot k_2} \gamma_\mu u(p_2) \hat{e}^\mu(k_2) + \bar{u}(p_2) \gamma_\mu i \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m}{-2p_1 \cdot k_2} \hat{k}_2 u(p_1) \hat{e}^\mu(k_1) = \quad (7.21)$$

$$= \bar{u}(p_2) \hat{k}_2 i \frac{\hat{p}_2 + m}{2p_2 \cdot k_2} \gamma_\mu u(p_2) \hat{e}^\mu(k_2) + \bar{u}(p_2) \gamma_\mu i \frac{\hat{p}_1 + m}{-2p_1 \cdot k_2} \hat{k}_2 u(p_1) \hat{e}^\mu(k_1) \quad (7.22)$$

essendo $\hat{k}_2 \hat{k}_2 = |k_2|^2 = 0$. Siccome poi vale $\hat{k}_2 \hat{p}_2 = 2p_2 \cdot k_2 - \hat{p}_2 \hat{k}_2$, $\hat{p}_1 \hat{k}_1 = 2p_1 \cdot k_1 - \hat{k}_1 \hat{p}_1$ (dalla $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$) e considerando che per l'equazione di Dirac $[\bar{u}(p_2) \hat{p}_2] \hat{k}_2 = \bar{u}(p_2) m \hat{k}_2$ e $\hat{k}_2 [\bar{u}(p_1) \hat{p}_1] = \hat{k}_2 m \bar{u}(p_1)$, si ha:

$$k_2^\nu [\dots] = \bar{u}(p_2) i \frac{2p_2 \cdot k_2}{2p_2 \cdot k_2} \gamma_\mu u(p_1) e^\mu(k_1) - \bar{u}(p_2) i \frac{2p_1 \cdot k_2}{2p_1 \cdot k_2} \gamma_\mu u(p_1) e^\mu(k_1) = 0$$

che è quanto volevamo dimostrare. Poiché la scelta della χ è arbitraria, resta da vedere se è possibile sceglierla in modo tale che $k_2^\nu \chi^\sigma + k_2^\sigma \chi^\nu = \delta_3^\nu \delta_3^\sigma - \delta_0^\nu \delta_0^\sigma$. Risulta evidentemente $\chi^1 = \chi^2 = 0$, per $\nu = \sigma = 0$ invece è $k_2^0 \chi^0 + k_2^0 \chi^0 = -1$, ovvero $\chi^0 = -1/2k_2^0$. Per $\nu = \sigma = 3$ vale $k_2^3 \chi^3 + k_2^3 \chi^3 = 1$, ovvero $\chi^3 = 1/2k_2^3$. Per $\nu = 3$ e $\sigma = 0$ vale $k_2^3 \chi^0 + k_2^0 \chi^3 = 0$ che è automaticamente soddisfatta visto che vale $k_2^0 = k_2^3$ (vale infatti $k_2 = (\omega, 0, 0, \omega)$). Con questa scelta di χ si ha dunque $T_2^{\nu\sigma} = g^{\nu\sigma}$ e analogamente $T_1^{\rho\mu} = g^{\rho\mu}$.¹³

Si ha così:

$$|\mathcal{A}|^2 = \bar{u}(p_2) \gamma_\nu \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m}{2p_1 \cdot k_1} \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\mu \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m}{2p_1 \cdot k_1} \gamma^\nu u(p_2)$$

ovvero, essendo la traccia ciclica:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}|^2 &= \text{Tr} \left(\frac{\hat{p}_2 + m}{2m} \right) \gamma_\nu \left(\frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m}{2p_1 \cdot k_1} \right) \gamma_\mu \left(\frac{\hat{p}_2 + m}{2m} \right) \gamma^\mu \left(\frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m}{2p_1 \cdot k_1} \right) \gamma^\nu = \\ &= \frac{1}{16m^2 (p_1 \cdot k_1)^2} \text{Tr} (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m) \gamma_\mu (\hat{p}_1 + m) \gamma^\mu (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m) \gamma^\nu (\hat{p}_2 + m) \gamma_\nu \end{aligned}$$

Siccome vale anche:

$$\gamma_\mu (\hat{p}_1 + m) \gamma^\mu = p_{1\rho} \gamma_\mu \gamma^\rho \gamma^\mu + m \gamma_\mu \gamma^\mu = -2p_{1\rho} \gamma^\rho + 4m = -2\hat{p}_1 + 4m$$

e analogamente:

$$\gamma_\nu (\hat{p}_2 + m) \gamma^\nu = -2\hat{p}_2 + 4m$$

si ha:

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{1}{4m^2 (p_1 \cdot k_1)^2} \text{Tr} (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m) (\hat{p}_1 - 2m) (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m) (\hat{p}_2 - 2m)$$

Dalla relazione:

$$\begin{aligned} (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m) (\hat{p}_2 - 2m) &= (\hat{p}_2 + \hat{k}_2 + m) (\hat{p}_2 - 2m) = (\hat{p}_2 + \hat{k}_2) \hat{p}_2 - m(\hat{p}_2 + \hat{k}_2) - 2m^2 \\ (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m) (\hat{p}_1 - 2m) &= (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m) (\hat{p}_1 - 2m) = (\hat{p}_1 + \hat{k}_1) \hat{p}_1 - m(\hat{p}_1 + \hat{k}_1) - 2m^2 \end{aligned}$$

e non scrivendo i termini in 0 fra due matrici gamma (che hanno traccia nulla), si ricava:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}|^2 &= \frac{1}{4m^2 (p_1 \cdot k_1)^2} \left\{ \text{Tr} \left[(\hat{p}_1 + \hat{k}_1) \hat{p}_2 (\hat{p}_1 + \hat{k}_1) \hat{p}_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - m^2 \left[2(\hat{p}_1 + \hat{k}_1) (\hat{p}_1 + \hat{p}_2) - (\hat{p}_1 + 2\hat{k}_2) (\hat{p}_1 + 2\hat{k}_1) \right] + 4m^4 \right] \right\} \end{aligned}$$

Dalle (7.16) e (7.16) si deduce che ($\hat{a} = a_\rho \gamma^\rho$):

$$\text{Tr} \hat{a} \hat{b} = 4a \cdot b$$

$$\text{Tr} \hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d} = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c) - (a \cdot c)(b \cdot d)]$$

e poiché $\text{Tr} \mathbb{I} = 4$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}|^2 &= \frac{1}{4m^2 (p_1 \cdot k_1)^2} \left\{ 2(p_1 + k_1) \cdot p_2 (p_1 + k_1) \cdot p_1 + \right. \\ &\quad \left. - m^2 [2(p_1 + k_1) \cdot (p_1 + p_2) - (p_2 + 2k_2) \cdot (p_1 + 2k_1)] + 4m^4 \right\} \end{aligned}$$

¹³Si può vedere che l'arbitrarietà nella scelta $T^{\nu\sigma} \rightarrow T^{\nu\sigma} + k^\nu \chi^\sigma + k^\sigma \chi^\nu$ è direttamente legata all'invarianza di gauge per il potenziale in fisica classica.

e tenendo presente che $p_1^2 = p_2^2 = m^2$ e $k_1^2 = k_2^2 = 0$:

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{1}{4m^2(p_1 \cdot k_1)^2} \left\{ \cancel{2m^2 p_1 \cdot p_2} + \cancel{2m^2 p_2 \cdot k_2} + \cancel{2(p_1 + k_1)(p_1 \cdot p_2)} + 2(p_1 + k_1)(p_2 \cdot k_1) + \right. \\ \left. - \cancel{2p_1 \cdot k_1 p_1 \cdot p_2} - \cancel{m^2 p_1 \cdot p_2} - 2m^4 - \cancel{2m^2 p_1 \cdot p_2} - 2m^2 p_1 \cdot k_1 + \right. \\ \left. - \cancel{2m^2 p_1 \cdot k_1} + \cancel{m^2 p_1 \cdot p_2} + 2m^2 p_2 \cdot k_1 + 2m^2 p_1 \cdot k_2 + 4m^2 k_1 \cdot k_2 + 4m^4 \right\}$$

ovvero:

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{1}{4m^2(p_1 \cdot k_1)^2} [2(p_1 \cdot k_1)(p_2 \cdot k_1) + 2m^2(p_2 \cdot k_1 - p_1 \cdot k_1 + p_1 \cdot k_2 + 2k_1 \cdot k_2) + 2m^4]$$

Il termine $|\mathcal{B}|^2$ si ottiene da $|\mathcal{A}|^2$ scambiando k_1 con $-k_2$:

$$|\mathcal{B}|^2 = \frac{1}{4m^2(p_1 \cdot k_2)^2} [-2(p_1 \cdot k_2)(p_2 \cdot k_2) + 2m^2(-p_2 \cdot k_2 + p_1 \cdot k_2 - p_1 \cdot k_1 + 2k_1 \cdot k_2) + 2m^4]$$

Occorre infine calcolare $\mathcal{A}\mathcal{B}^\dagger$. Mediando sugli spin iniziali e sommando su quelli finali:

$$\mathcal{A}\mathcal{B}^\dagger = \bar{u}(p_2)\gamma_\mu \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_2 + m}{2p_1 \cdot k_2} \gamma_\nu y(p_1) \bar{u}(p_1)\gamma^\mu \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m}{-2p_1 \cdot k_2} \gamma^\nu u(p_2) - \frac{1}{4}$$

Si ha quindi:

$$\mathcal{A}\mathcal{B}^\dagger = \frac{1}{4} \text{Tr} \gamma_\mu \left(\frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_2 + m}{2p_1 \cdot k_2} \right) \gamma_\nu \left(\frac{\hat{p}_1 + m}{2m} \right) \gamma^\mu \left(\frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m}{-2p_1 \cdot k_2} \right) \gamma^\nu \left(\frac{\hat{p}_2 + m}{2m} \right) = \\ = \frac{1}{16m^2(p_1 \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\gamma_\mu (\hat{p}_1 + \hat{k}_2 + m) \gamma_\nu (\hat{p}_1 + m) \gamma^\mu (\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m) \gamma^\nu (\hat{p}_2 + m) \right]$$

Siccome si ha:

$$\gamma_\mu (\hat{p}_1 + \hat{k}_2 + m) \gamma_\nu (\hat{p}_1 + m) \gamma^\mu = \\ = (p_1 + k_1)^\rho p_1^\sigma \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma^\mu + m(p_1 + k_1)^\rho \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma^\mu + m p_1^\sigma \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma^\mu + m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu = \\ = -2(p_1 + k_1)^\rho p_1^\sigma \gamma_\sigma \gamma_\nu \gamma_\rho + 4m(p_1 + k_1)^\rho g_{\rho\nu} + 4m p_1^\sigma g_{\nu\sigma} - 2m^2 \gamma_\nu = \\ = -2\hat{p}_1 \gamma_\nu (\hat{p}_1 + \hat{k}_1) + 4m(2p_{1\nu} + 2k_{1\nu} - 2m^2 \gamma_\nu)$$

e

$$(\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m) \gamma^\nu (\hat{p}_2 + m) = (\hat{p}_1 - \hat{k}_2) \gamma^\nu \hat{p}_2 + m \left[(\hat{p}_1 - \hat{k}_2) \gamma^\nu + \gamma^\nu \hat{p}_2 \right] + m^2 \gamma^\nu$$

sostituendo si ricava:

$$\mathcal{A}\mathcal{B}^\dagger = \frac{-1}{16m^2(p_i \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ -2\hat{p}_1 \gamma_\nu (\hat{p}_1 + \hat{k}_1) (\hat{p}_1 - \hat{k}_2) \gamma^\nu \hat{p}_2 - 2m^2 \hat{p}_1 \gamma_\nu (\hat{p}_1 + \hat{k}_1) \gamma^\nu + \right. \\ \left. + 4m^2(2p_{1\nu} + k_{1\nu}) \left[(\hat{p}_1 - \hat{k}_2) \gamma^\nu + \gamma^\nu \hat{p}_2 \right] - 2m^2 \gamma^\nu (\hat{p}_1 - \hat{k}_2) \gamma^\nu \hat{p}_2 - 2m^4 \gamma_\nu \gamma^\nu \right\} \\ = \frac{-1}{16m^2(p_i \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ -8(\hat{p}_1 + \hat{k}_1) \cdot (\hat{p}_1 - \hat{k}_2) \hat{p}_1 \hat{p}_2 + 4m^2 \hat{p}_1 (\hat{p}_1 + \hat{k}_1) + \right. \\ \left. + 4m^2 (\hat{p}_1 - \hat{k}_2) (2\hat{p}_1 + \hat{k}_1) + 4m^2 (2\hat{p}_1 + \hat{k}_2) \hat{p}_2 + 4m^2 (\hat{p}_1 - \hat{k}_2) \hat{p}_2 - 8m^4 \right\} \\ = \frac{-1}{16m^2(p_i \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \left\{ -8(\hat{p}_1 + \hat{k}_1) \cdot (\hat{p}_1 - \hat{k}_2) \hat{p}_1 \hat{p}_2 + 4m^2 [p_1 \cdot (p_1 + k_2) + \right. \\ \left. + (p_1 - k_2) \cdot (2p_1 + k_1) + (2p_1 + k_1) \cdot p_2 + (p_1 - k_2) \cdot p_2 - m^2] \right\}$$

in definitiva:

$$\mathcal{A}\mathcal{B}^\dagger = \frac{-1}{16m^2(p_i \cdot k_1)(p_1 \cdot k_2)} \left\{ 2p_1 \cdot p_2 [p_1 \cdot (k_2 - k_1) + k_1 \cdot k_2] + \right. \\ \left. + m^2 [m^2 + (k_1 - k_2) \cdot (2p_1 + p_2) + p_1 \cdot p_2 - k_1 \cdot k_2] \right\}$$

7.4.6 Diffusione positrone-elettrone

Si consideri ora il processo $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$, dove gli elettroni e positroni iniziali hanno rispettivamente quadrimpulso q_1 e p_1 e quelli finali q_2 e p_2 . Procedendo come al solito, si possono individuare i seguenti casi:

- A distruzione e^+ in x_1 creazione e^+ in x_2
 distruzione e^- in x_1 creazione e^- in x_2
 B distruzione e^+ in x_2 creazione e^+ in x_2
 distruzione e^- in x_1 creazione e^- in x_1

il primo dei quali è descritto da:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x_1) &= b_+ q_1 \bar{u}(-q_1) e^{-iq_1 \cdot x_1} & \psi(x_2) &= b_+^\dagger q_2 u(-q_2) e^{iq_2 \cdot x_2} \\ \psi(x_1) &= b_- p_1 \bar{u}(p_1) e^{-ip_1 \cdot x_1} & \bar{\psi}(x_2) &= b_-^\dagger p_2 \bar{u}(p_2) e^{ip_2 \cdot x_2}\end{aligned}$$

mentre il secondo si può ottenere dal primo scambiando $-q_1 \leftrightarrow p_2$. Si noti che la matrice di diffusione è antisimmetrica in questo scambio.

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(-q_2) \frac{i}{(p_1 + q_1)^2} \bar{u}(-q_1) \gamma_\nu u(-q_2) \frac{i}{(p_1 - p_2)^2} \bar{u}(p_2) \gamma^\nu u(p_1)$$

Denotando con $E_T = p_+ q_1$, l'ampiezza di diffusione è data da:

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}|^2 &= \frac{1}{E_T^4} \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(-q_2) \bar{u}(-q_1) \gamma^\mu u(p_1) \gamma^\nu u(-q_1) \bar{u}(-q_2) \gamma_\nu u(p_2) = \\ &= \frac{1}{E_T^4} \frac{1}{16m^4} [\text{Tr}(\hat{p}_2 - m) \gamma_\mu (m - \hat{q}_2) \gamma_\nu] [\text{Tr}(\hat{p}_1 + m) \gamma^\nu (m - \hat{q}_1) \gamma^\mu] = \\ &= \frac{1}{E_T^4 m^4} [-p_{2\mu} q_{2\nu} - p_{2\nu} q_{2\mu} + p_2 q_2 g_{\mu\nu} + m^2 g_{\mu\nu}] [-p_{1\mu} q_{1\nu} - p_{1\nu} q_{1\mu} + p_1 q_1 g_{\mu\nu} + m^2 g_{\mu\nu}] = \\ &= \frac{1}{E_T^4 m^4} [2(p_1 \cdot p_2)(q_1 \cdot q_2) + 2(p_1 \cdot q_2)(p_2 \cdot q_1) + 4m^4 + 2m^2(p_1 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_2)]\end{aligned}$$

e analogamente:

$$|\mathcal{B}|^2 = \frac{1}{E_T^4 m^4} [2(p_1 \cdot q_1)(q_2 \cdot p_2) + 2(p_1 \cdot q_2)(p_2 \cdot q_1) + 4m^4 - 2m^2(p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2)]$$

e:

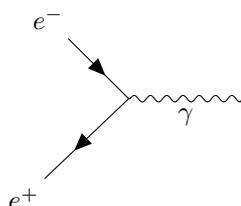
$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathcal{B}^\dagger &= \frac{1}{E_T^2 (p_1 - p_2)^2} \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(-q_2) \bar{u}(-q_1) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma_\nu u(p_2) \bar{u}(-q_2) \gamma^\nu u(-q_1) = \\ &= \frac{1}{E_T^2 (p_1 - p_2)^2} \frac{1}{16m^4} \text{Tr}(\hat{p}_1 + m) \underbrace{\gamma_\nu (\hat{p}_2 + m) \gamma_\mu (m - \hat{q}_2) \gamma^\nu (m - \hat{q}_1) \gamma^\mu}_{=} = \\ &= \frac{1}{E_T^2 (p_1 - p_2)^2} \frac{1}{16m^4} \text{Tr}(\hat{p}_1 + m) [4m(p_{2\mu} - q_{2\mu}) + 2\hat{q}_2 \gamma_\mu \hat{p}_2 - 2m^2 \gamma_\mu] (m - \hat{q}_1) \gamma^\mu = \\ &= \frac{1}{E_T^2 (p_1 - p_2)^2} \frac{1}{16m^4} \text{Tr} \left[4m^2 \hat{p}_1 (p_{2\mu} - q_{2\mu}) \gamma^\mu - 4m^2 (p_{2\mu} - q_{2\mu}) \hat{q}_1 \gamma^\mu - 2\hat{p}_1 \hat{Q}_2 \gamma_\mu \hat{p}_2 \hat{q}_1 \gamma^\mu + \right. \\ &\quad \left. + 2m^2 \hat{q}_2 \gamma_\mu \hat{p}_2 \gamma^\mu + 2m^2 \hat{p}_1 \gamma_\mu \hat{q}_1 \gamma^\mu + 2m^4 \gamma^\mu \gamma_\mu \right] = \\ &= \frac{1}{E_T^2 (p_1 - p_2)^2} \frac{1}{16m^4} \text{Tr} [4m^2 [\hat{p}_1 (\hat{p}_2 - \hat{q}_2) - \hat{q}_1 (\hat{p}_2 - \hat{q}_2) - \hat{q}_2 \hat{p}_2 - \hat{p}_1 \hat{q}_1] + 8m^4 - 8\hat{p}_1 \hat{q}_2 p_2 q_1] = \\ &= \frac{1}{E_T^2 (p_1 - p_2)^2} \frac{1}{4m^4} \{-8(p_1 \cdot q_2)(p_2 \cdot q_1) + 4m^2 [p_1 \cdot (p_2 - q_2) - q_1(p_2 - q_2) - q_2 \cdot p_2 - p_1 \cdot q_1] + 8m^4\}\end{aligned}$$

La dipendenza dall'angolo di diffusione si può vedere mettendosi nel sistema di riferimento del laboratorio, nel quale è $q_1 = E(1, 0, 0, -\beta)$, $p_1 = E(1, 0, 0, \beta)$, $q_2 = E(1, -\beta \sin \theta, 0, -\beta \cos \theta)$, $p_2 = E(1, \beta \sin \theta, 0, \beta \cos \theta)$ dove $E = E_T/2$.

7.4.7 Regole di Feynman per l'elettrodinamica quantistica

Come è noto, la matrice di diffusione per processi di elettrodinamica quantistica è data dalla (7.14), essa è stata calcolata nei paragrafi precedenti per alcuni fenomeni del secondo ordine. Esiste un metodo generale dovuto a Richard Feynman che permette di scrivere direttamente questa matrice per i processi in esame. Innanzitutto si procede a disegnare dei diagrammi che esplicitano visivamente i vari casi possibili del dato processo (i casi A e B visti precedentemente), e per far questo si opera nel seguente modo.

I fotoni sono rappresentati da linee ondulate, mentre gli elettroni e i positroni (fermioni) sono rappresentati da linee drette sulle quali si disegna una freccia per distinguere gli uni dagli altri. Convenzionalmente si fissa un verso per l'elettrone e il verso opposto per il positrone. Tali linee sono poi saldate in un punto detto *vertice*, gli elementi più piccoli dei diagrammi hanno quindi la forma:



e rappresentano processi elementari: poiché questi non possono avvenire, occorre unire almeno due di questi (processi del secondo ordine). Nei diagrammi di Feynman il tempo procede da sinistra verso destra: le linee entranti in un vertice (da sinistra verso destra) rappresentano particelle che vengono distrutte mentre quelle uscenti particelle create.

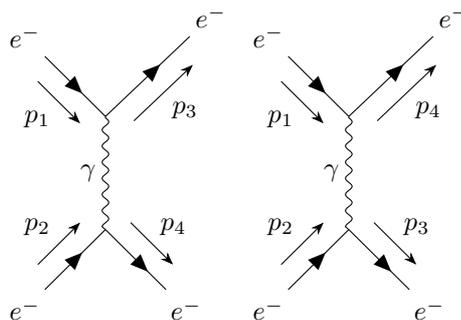
Disegnati così i diagrammi per il processo in esame, la matrice di diffusione si scrive con le seguenti regole:

distruzione $e^- \rightarrow u(p)$	propagatore $e^- \rightarrow -i \frac{m + p_\mu \gamma^\mu}{p^2 - m^2}$
creazione $e^- \rightarrow \bar{u}(p)$	
distruzione $\gamma \rightarrow e^\mu(k)$	propagatore $\gamma \rightarrow -i \frac{g^{\mu\nu}}{k^2}$
creazione $\gamma \rightarrow e^{*\mu}(k)$	
distruzione $e^+ \rightarrow \bar{u}(-q)$	propagatore $e^+ \rightarrow -i \frac{m + q_\mu \gamma^\mu}{q^2 - m^2}$
creazione $e^+ \rightarrow u(-q)$	

Nei propagatori, p , q , k sono i quadrimpulsi delle particelle che si propagano (virtuali), essi si calcolano tenendo presente che in un vertice la somma dei quadrimpulsi è nulla se presi con segno positivo se entranti e negativo se uscenti. Infine, la proprietà di simmetria/antisimmetria della matrice di diffusione sono regolate dalle statistiche di Bose o di Fermi a seconda dei casi.

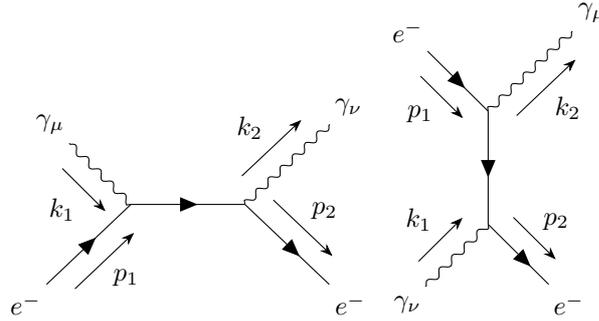
Faremo ora vedere qualche esempio, tenendo presente che nello scrivere la matrice di diffusione si incomincia sempre andando in verso opposto alle frecce degli elettroni e positroni.

DIFFUSIONE $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$



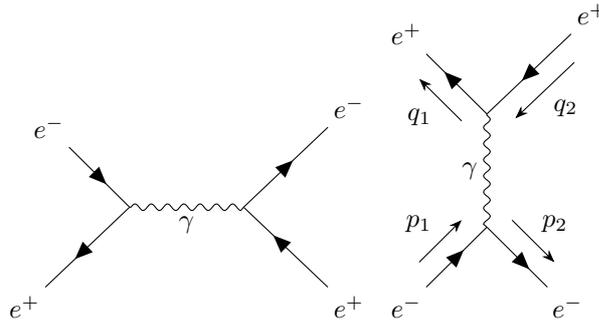
$$-e^2 \left[\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1) \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_4)\gamma_\nu u(p_2) - \bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_1) \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 - p_4)^2} \bar{u}(p_3)\gamma_\nu u(p_2) \right]$$

DIFFUSIONE $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$



$$-e^2 \left[\bar{u}(p_2)\gamma_\nu e^{*\nu}(k_2)(-i) \frac{m + (\hat{k}_2 + \hat{p}_2)}{(p_2 + k_2)^2 - m^2} \gamma_\mu e^\mu(k_1)u(p_1) + \bar{u}(p_2)\gamma_\nu e^\nu(k_1)(-i) \frac{m + (\hat{p}_2 - \hat{k}_1)}{(p_2 - k_1)^2 - m^2} \gamma_\mu e^{*\mu}(k_2)u(p_1) \right]$$

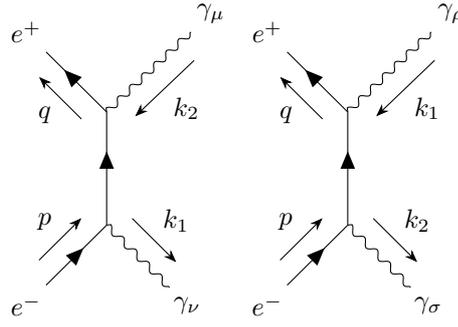
DIFFUSIONE $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$



$$-e^2 \left[\bar{u}(p_2)\gamma_\nu u(-q_2) \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 + q_1)^2} \bar{u}(-q_1)\gamma_\mu u(p_1) - \bar{u}(-q_1)\gamma_\mu u(-q_2) \frac{-ig^{\mu\nu}}{(q_1 - q_2)^2} \bar{u}(p_2)\gamma_\nu u(p_1) \right]$$

ANNICHILAZIONE DI UNA COPPIA e^+, e^- IN DUE FOTONI

Il processo $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$ è descritto dai seguenti diagrammi:



$$-e^2 \left[\bar{u}(-q)\gamma_\mu e^{*\mu}(k_2) \frac{\hat{k}_2 - \hat{q} + m}{(k_2 - q)^2 - m^2} \gamma_\nu e^{*\nu}(k_1) u(p) + \bar{u}(-q)\gamma_\rho \frac{\hat{k}_2 - \hat{q} + m}{(k_1 - q)^2 - m^2} \gamma_\sigma e^{*\sigma}(k_2) u(p) e^{*\rho}(k_1) \right]$$

Da cui:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}|^2 &= \bar{u}(-q)\gamma_\mu \frac{\hat{k}_2 - \hat{q} + m}{-2k_2 \cdot q} \gamma_\nu u(p) \bar{u}(p)\gamma_\sigma \frac{\hat{k}_2 - \hat{q} + m}{-2k_2 \cdot q} \gamma_\rho u(-q) e^{*\mu}(k_2) e^{*\nu}(k_1) e^{*\sigma}(k_1) e^{*\rho}(k_2) = \\ &= \bar{u}(-q)\gamma_\mu \frac{\hat{k}_2 - \hat{q} + m}{-2k_2 \cdot q} \gamma_\nu u(p) \bar{u}(p)\gamma^\nu \frac{\hat{k}_2 - \hat{q} + m}{-2k_2 \cdot q} \gamma^\mu u(-q) = \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr} \frac{\hat{k}_2 - \hat{q} + m}{-2k_2 \cdot q} \gamma_\nu \frac{\hat{p} + m}{2m} \gamma_\nu \frac{\hat{k}_2 - \hat{q} + m}{-2k_2 \cdot q} \gamma^\mu \frac{m - \hat{q}}{2m} \gamma_\mu = \\ &= \frac{1}{16m^2(k_2 \cdot q)^2} \frac{1}{4} \text{Tr} \left[(\hat{k}_2 - \hat{q})4m - (\hat{k}_2 - \hat{q})2\hat{p} + 4m^2 - 2m\hat{p} \right] \left[(\hat{k}_2 - \hat{q})4m - (\hat{k}_2 - \hat{q})2\hat{q} + 4m^2 - 2m\hat{q} \right] = \\ &= \frac{1}{16m^2(k_2 \cdot q)^2} \frac{1}{4} \text{Tr} \left[16m^2(\hat{k}_2 - \hat{q})(\hat{k}_2 - \hat{q}) + 8m^2(\hat{k}_2 - \hat{q})\hat{q} - 4(\hat{k}_2 - \hat{q})\hat{p}(\hat{k}_2 - \hat{q})\hat{q} + \right. \\ &\quad \left. - 8m^2(\hat{k}_2 - \hat{q})\hat{p} + 8m^2(\hat{k}_2 - \hat{q})\hat{q} + 16m^2 + 8m^2\hat{p}(\hat{k}_2 - \hat{q}) - 4m^2\hat{p}\hat{q} \right] \\ &= \frac{1}{16m^2(k_2 \cdot q)^2} \left[16m^2(k_2 - q)^2 + 16m^2(k_2 - q) \cdot q - 8(k_2 - q) \cdot p(k_2 - q) \cdot q + 4(k_2 - q)^2 p \cdot q + \right. \\ &\quad \left. 16m^2(k_2 - q) \cdot p + 16m^4 - 4m^2 p \cdot q \right] = \\ &= \frac{1}{(4m^2 k_2 \cdot q)^2} \left[4m^5 + 4m^2(k_2 - q) \cdot (k_2 - p) - m^2 p \cdot q + (k_2 - q)^2 p \cdot q - 2(k_2 - q) \cdot p(k_2 - q) \right] \end{aligned}$$

e in maniera analoga per calcolare $|\mathcal{B}|^2$ e:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{B}^\dagger &= \bar{u}(-q)\gamma_\mu \frac{\hat{k}_2 - \hat{q} + m}{-2k_2 \cdot q} \gamma_\nu u(p) \bar{u}(p)\gamma_\sigma \frac{\hat{k}_1 - \hat{q} + m}{-2k_1 \cdot q} \gamma_\rho u(-q) e^{*\mu}(k_2) e^{*\nu}(k_1) e^\sigma(k_2) e^\rho(k_1) = \\ &= \bar{u}(-q)\gamma_\mu \frac{\hat{k}_2 - \hat{q} + m}{2k_2 \cdot q} \gamma_\nu u(p) \bar{u}(p)\gamma^\mu \frac{\hat{k}_1 - \hat{q} + m}{2k_1 \cdot q} \gamma_\nu u(-q) \end{aligned}$$

$\approx \approx \text{FINE} \approx \approx$

